

NOTIONS DE DENOMBREMENT

A. Ensemble fini – cardinal d'un ensemble fini

Définition $n \in \mathbb{N}^*$; E est un ensemble qui contient n éléments . On dit que E est un ensemble fini .
 • Le nombre n s'appelle le cardinal de E on note $\text{card}E = n$ avec $\text{card}\emptyset = 0$

propriétés
 $\text{card}E \cup F = \text{card}E + \text{card}F - \text{card}E \cap F$; $\text{card}E \times F = \text{card}E \times \text{card}F$; $E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$
 $\text{card}\bar{A} = \text{card}E - \text{card}A$; $A \subset E$ (A est une partie de E) et $\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$
 On a $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$.

B. Principe fondamental de dénombrement

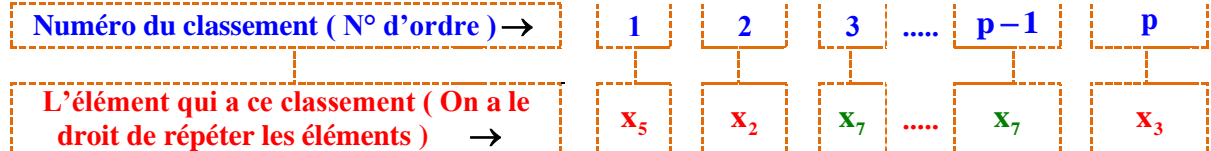
principe
 On considère une expérience comporte p choix (étape) avec $(p \in \{1, 2, 3, \dots\})$.
 • Si le choix n° 1 se fait avec n_1 manières différentes .
 • Si le choix n° 2 se fait avec n_2 manières différentes .
 •
 • Si le choix n° p se fait avec n_p manières différentes .
 Alors le nombre total des manières des p choix est $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p$

C. Arrangement avec répétition de p éléments parmi n éléments

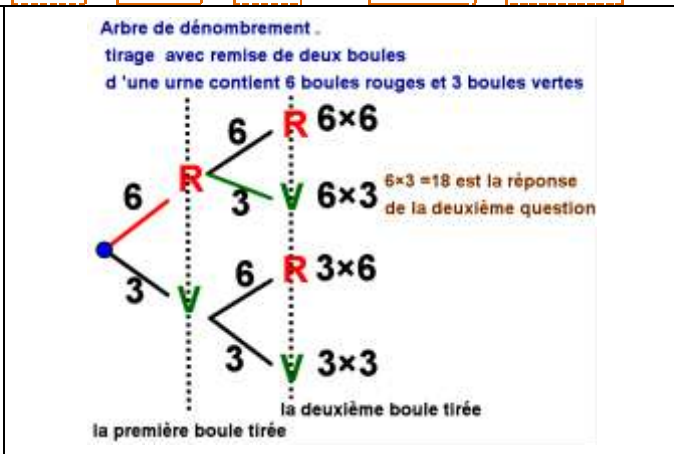
Définition Ordonné p éléments avec répétition parmi n éléments (répétition = avec possibilité de répéter les éléments) s'appelle arrangement avec répétition de p éléments parmi n éléments

Propriété Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi n éléments est le nombre n^p

remarque On représente **une arrangement avec répétition** de p éléments parmi les éléments suivants x_1 et x_2 et x_3 et x_n par :



Modèle d'une urne ou un sac contient (des boules ou des jetons ou des pions)
 Une urne contient n boules lorsque on tire p boules l'une après l'autre et avec remise (càd la boule tiré doit être remettre à l'urne avant de tiré la boule suivante) on dit tirage avec remise .
 Exemple :une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes.
 Questions :
 1. Quel le nombre des tirages possibles ?
 2. Quel le nombre des tirages tel que la première boule tirée est rouge et la 2^{ème} est verte ?
Réponse : 1^{ère} Question. 9^2 ; 2^{ème} Q 6×3



D. Arrangement sans répétition de p éléments parmi n éléments

Définition Ordonné p éléments sans répétition parmi n éléments (c.à.d. pas de possibilité de répéter les éléments) s'appelle arrangement sans répétition de p éléments parmi n éléments

Propriété Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi n éléments est le nombre :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}_p = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ .(avec } 0 \leq p \leq n \text{ et } n \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \mathbb{N} \text{)}$$

- Le nombre suivant : $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$ par $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$ on lit :
- factoriel n ($n \in \mathbb{N}^*$) avec $0! = 1$; $1! = 1$.

Remarques	<ul style="list-style-type: none"> $A_n^0 = 1$ et $A_n^1 = n$ et $A_n^2 = \underbrace{n(n-1)}_2$ et $A_n^3 = \underbrace{n(n-1)(n-2)}_3$ On représente un arrangement sans répétition de p éléments parmi les éléments suivants x_1 et x_2 et x_3 et x_n par : <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px; margin-right: 10px;">Numéro du classement (N° ordre) →</div> <div style="display: flex; gap: 10px;"> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">1</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">2</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">3</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">....</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">p-1</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">p</div> </div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px; margin-right: 10px;">L'élément qui a ce classement (On obtient un arrangement sans répétition) →</div> <div style="display: flex; gap: 10px;"> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">x_5</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">x_2</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">x_7</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">....</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">x_1</div> <div style="border: 1px dashed green; padding: 2px;">x_3</div> </div> </div>
Modèle d'une urne ou un sac contient (des boules ou des jetons ou des pions)	<p>Une urne contient n boules lorsque on tire p boules l'une après l'autre et sans remise (càd la boule tiré doit être à l'extérieur de l'urne avant de tiré la boule suivante) on dit tirage sans remise .</p> <p>Exemple : une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes .</p> <p>Questions :</p> <ol style="list-style-type: none"> Quel le nombre des tirages possibles ? Quel le nombre des tirages tel que les deux boules sont vertes ? <p>Réponse : 1^{ère} Q. $A_9^2 = 9 \times 8$ 2^{ème} Q $A_3^2 = 3 \times 2$</p> <div style="margin-top: 10px;"> <p>Arbre de dénombrement . tirage sans remise de deux boules d'une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes</p> <p>la première boule tirée</p> </div>
E. Permutation de n élément càd : arrangement sans répétition de n éléments parmi n éléments	
Définition	Ordonné n éléments sans répétition parmi n éléments (c.à.d. pas de possibilité de répéter les éléments) s'appelle permutation de n éléments
Propriété	Le nombre des permutation de n éléments est le nombre $A_n^n = n!$. (avec $n \in \mathbb{N}$)
Remarques	<p>On représente une permutation de n éléments parmi les éléments : x_1 et x_2 et .. x_n par</p> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px; margin-right: 10px;">Numéro du classement →</div> <div style="display: flex; gap: 10px;"> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">1</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">2</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">3</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">....</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">n-1</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">n</div> </div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px; margin-right: 10px;">L'élément qui a ce classement → (On obtient une permutation)</div> <div style="display: flex; gap: 10px;"> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">x_4</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">x_2</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">x_8</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">....</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">x_1</div> <div style="border: 1px dashed red; padding: 2px;">x_{n-3}</div> </div> </div>
F. Combinaison de p éléments parmi n éléments	
Définition	E est un ensemble fini (card $E = n$) toute partie A de E contient p éléments (avec $(p \leq n)$) s'appelle combinaison de p éléments parmi n éléments
Propriété	<p>Le nombre des combinaisons p éléments ($p \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$) parmi n éléments est le nombre entier naturel :</p> $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}^p}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p}$ <p>avec $0 \leq p \leq n$ et $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$)</p>
Remarques	<ul style="list-style-type: none"> $C_n^p = C_n^{n-p}$ et $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ relation de Pascal : $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ et $0 \leq p \leq n-1$ binôme de Newton : <ul style="list-style-type: none"> $\forall n \in \mathbb{N}^* : (a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n b^0$ $\forall n \in \mathbb{N}^* : (a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i}$ (car $a+b = b+a$)

G. Expérience aléatoire	
Vocabulaire	<ul style="list-style-type: none"> Expérience aléatoire : toute expérience dont ses résultats sont connus mais on ne pas donner le résultat de l'expérience avant de réaliser l'expérience ; on l'appelle expérience aléatoire . Les résultats obtenues par cette expérience aléatoire on les note par ω_1 puis ω_2 puis ω_3 ω_n (on général ω_i avec $i \in \{1, 2, \dots; n\}$) . Eventualité (ou événement élémentaire) : chaque ω_i s'appelle une eventualité ou un événement élémentaire . Univers : les eventualités (ou les événements élémentaires) constituent un ensemble s'appelle univers noté $\Omega = \{\omega_1; \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Evènement : toute partie A de Ω s'appelle évènement . <ul style="list-style-type: none"> Si $A = \Omega$ alors l'évènement Ω s'appelle évènement certain . Si $A = \emptyset$ alors l'évènement \emptyset s'appelle évènement impossible . Si $A = \{\omega_i\}$ alors l'évènement $\{\omega_i\}$ s'appelle évènement élémentaire . Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont deux événements incompatibles Si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$ alors B s'appelle l'évènement contraire de A (vis versa) on note $B = \bar{A}$ (de même $A = \bar{B}$) . remarque $\text{card}A + \text{card}\bar{A} = \text{card}\Omega$ L'évènement $A \cap B$ est l'ensemble constitué par des eventualités réaliser à la fois par les événements A et B . L'évènement $A \cup B$ est l'ensemble constitués par des eventualités réaliser soit par l'évènement A ou par l'évènement B . Les événements A_1 et A_2 et A_3, \dots, A_p est une partition de Ω s'ils sont disjoints deux à deux et $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p = \Omega$.
H. Probabilité sur Ω l'univers d'une expérience aléatoire	
Définition	<p>Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ univers des eventualités d'une expérience aléatoire .</p> <ul style="list-style-type: none"> Lorsque on répète une expérience aléatoire N fois dans les mêmes conditions si n_i est le nombre de fois on a obtenue ω_i . Le nombre $\frac{n_i}{N}$ s'appelle la probabilité de l'évènement élémentaire $\{\omega_i\}$ on note $p_i = p(\{\omega_i\}) = \frac{n_i}{N}$ sans oublier $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$. Probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A on note $p(A)$ (exemple : $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_7\}$ donc $p(A) = p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_3\}) + p(\{\omega_7\})$)
Propriétés	<p>A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire</p> <ul style="list-style-type: none"> $\forall A \in \Omega : 0 \leq p(A) \leq 1$ et $p(\Omega) = 1$ et $p(\emptyset) = 0$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ et $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
I. Hypothèse d'équiprobabilité	
	<p>Si dans une expérience aléatoire (dont l'univers est Ω) tous les événements élémentaires $A = \{\omega_i\}$ ont même probabilité (c.à.d. $p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = p(\{\omega_3\}) = \dots = p(\{\omega_n\})$) alors probabilité d'un évènement A de Ω est $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$</p>
J. Probabilité conditionnelle – Deux événements indépendants - les probabilités composées	
	<p>A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire .</p>

- Probabilité de l'événement B sachons que l'événement A est réalisé est $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ on la note par $p_A(B)$ ou par $p(B/A)$ donc on a $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$
- A et B sont deux événements indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ ou $p_A(B) = p(B)$
- $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ l'écriture : $p(A \cap B) = p(A)p_A(B) = p(B)p_B(A)$ s'appelle la formule du probabilité composée .

K. variables aléatoire – loi de probabilité – espérance mathématique – variance – écart-type

Ω est univers d'une expérience aléatoire toute fonction X définie par :

$$X : \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega_i \mapsto X(\omega_i) = x_i$$

S'appelle variable aléatoire définie sur Ω .

Vocabulaire :

- les valeurs x_1 et x_2 et x_3 et et x_p sont appelées les valeurs du variable aléatoire X
- ensembles des valeurs noté par $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$.
- $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}$ donc $(X = x_i)$ présente un événement c.à.d. $(X = x_i) \subset \Omega$.
- L'écriture $p(X = x_i)$ signifie probabilité de l'événement $(X = x_i)$.
- **Loi de probabilité de X :** c'est de calculer toutes les probabilités $p(X = x_i)$ avec $x_i \in X(\Omega)$
- On peut donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme d'un tableau :

x_1	x_1	x_2	x_p
$p(X = x_1)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	$p(X = x_p)$

- Le nombre : $\sum_{i=1}^{i=n} x_i \times p(X = x_i) = x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + \dots + x_n \times p(X = x_n)$ s'appelle l'espérance mathématique du variable aléatoire X ; on note $E(X)$.
- Le nombre $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
 $= (x_1)^2 \times p(X = x_1) + (x_2)^2 \times p(X = x_2) + \dots + (x_n)^2 \times p(X = x_n) - [E(X)]^2$ s'appelle la variance du variable aléatoire X ; on note $V(X)$. remarque $V(X) \geq 0$.
- Le nombre : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ s'appelle l'écart-type ; du variable aléatoire X . on note $\sigma(X)$

L. Loi binomiale ou distribution binomiale

Soit p est la probabilité de l'événement A d'une expérience aléatoire (seulement une fois)

- On répète cette expérience n fois (dont les mêmes conditions de départ)
- On considère la variable aléatoire X définie de la manière suivante « le nombre de fois tel que l'évènement A est réalisé après la répétition de l'expérience de départ n fois »
- Ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$
- X est appelé loi binomiale (ou distribution) de paramètres n et p on note $X = B(n, p)$.

On a : $\forall k \in X(\Omega) : p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$, $E(X) = np$, $V(X) = n \times p \times (1-p)$

définitions

Loi binomiale ou distribution