Exercice 1 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1}=\frac{6-U_n}{4-U_n}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad \text{et}\quad U_0=0$$

1) Montrer que : $U_n<2\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n = 0 on a $U_0=0$ donc $U_0<2$

Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $U_n<2$ et montrons que $U_{n+1}<2$ c'est-à-dire $U_{n+1}-2<0$

$$U_{n+1}-2=\frac{6-U_n}{4-U_n}-2=\frac{6-U_n-8+2U_n}{4-U_n}$$

$$U_{n+1}-2=\frac{U_n-2}{4-U_n}$$

On a $U_n<2$ donc $U_n-2<0$ et $4-U_n>2$

donc $U_{n+1}-2=\dfrac{U_n-2}{4-U_n}<0$

D'où $U_n<2\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) a - Montrer que :

$$U_{n+1}-U_n=\frac{(U_n-3)(U_n-2)}{4-U_n}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{6-U_n}{4-U_n}-U_n=\frac{6-U_n-4U_n+U_n^2}{4-U_n}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n^2-5U_n+6}{4-U_n}=\frac{(U_n-3)(U_n-2)}{4-U_n}$$

$$(U_n-3)(U_n-2)=U_n^2-5U_n+6$$

D'où $U_{n+1}-U_n=\dfrac{(U_n-3)(U_n-2)}{4-U_n}$ On a

$$U_{n+1}-U_n=\frac{(U_n-3)(U_n-2)}{4-U_n}$$

On a $U_n-2<0$ et $U_n-3<-1$ et $4-U_n>2$

Donc $U_{n+1}-U_n=\dfrac{(U_n-3)(U_n-2)}{4-U_n}>0$

D'où la suite (U_n) est strictement croissante.

3) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n=\frac{2U_n-6}{U_n-2}\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

a – Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2

Montrons que $V_{n+1}=2V_n$? $\forall n\in\mathbb{N}$

$$V_{n+1}=\frac{2U_{n+1}-6}{U_{n+1}-2}=\frac{2\dfrac{6-U_n}{4-U_n}-6}{\dfrac{U_n-2}{4-U_n}}=\frac{\dfrac{12-2U_n-24+6U_n}{4-U_n}}{\dfrac{U_n-2}{4-U_n}}$$

$$V_{n+1}=\frac{4U_n-12}{U_n-2}=\frac{2(U_n-6)}{U_n-2}=2V_n$$

D'où $V_{n+1}=2V_n$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison 2.

b – Exprimer V_n en fonction de n.

(V_n) est une suite géométrique de raison 2 de premier terme $V_0=\dfrac{2U_0-6}{U_0-2}=3$

$V_n=V_0 2^n$ donc $V_n=3\times 2^n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

c –En déduire que $U_n=\dfrac{6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$V_n=\frac{2U_n-6}{U_n-2}\Leftrightarrow V_n(U_n-2)=2U_n-6$$

$$\Leftrightarrow V_nU_n-2U_n=2V_n-6$$

$$\Leftrightarrow U_n(V_n-2)=2V_n-6$$

$$\Leftrightarrow U_n(V_n-2)=2V_n-6$$

$$\Leftrightarrow U_n=\frac{2V_n-6}{V_n-2}$$

Donc $U_n=\dfrac{2(3\times 2^n)-6}{3\times 2^n-2}=\dfrac{6\times 2^n-6}{3\times 2^n-2}$

$$U_n=\frac{6\times 2^n(1-\frac{1}{2^n})}{2^n(3-\frac{2}{2^n})}=\frac{6(1-\frac{1}{2^n})}{(3-\frac{2}{2^n})}$$

D'où $U_n=\dfrac{6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

d – Calculer $\lim U_n$

$$\lim U_n=\lim\frac{6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{6}{3}=2$$

Car $\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ et $-1<\dfrac{1}{2}<1$

D'où $\lim U_n=2$

Exercice 2 :

1) Calculer $\mathbf{I}=\int_1^{\mathbf{e}}\frac{1}{\mathbf{x}(1+\ln\mathbf{x})}\mathbf{dx}$ et $\mathbf{J}=\int_0^1 \mathbf{x}\mathbf{e}^{\mathbf{x}^2-1}\mathbf{dx}$

$$\mathbf{I}=\int_1^{\mathbf{e}}\frac{1}{\mathbf{x}(1+\ln\mathbf{x})}\mathbf{dx}=\int_1^{\mathbf{e}}\frac{\frac{1}{\mathbf{x}}}{1+\ln\mathbf{x}}\mathbf{dx}\qquad (1+\ln\mathbf{x})'=\frac{1}{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{I}=\int_1^{\mathbf{e}}\frac{(1+\ln\mathbf{x})'}{1+\ln\mathbf{x}}\mathbf{dx}=\left[\ln\left|1+\ln\mathbf{x}\right|\right]_1^{\mathbf{e}}$$
$$=\ln(1+\ln\mathbf{e})-\ln(1+\ln 1)=\ln 2$$

D'où $\mathbf{I}=\ln 2$

$$\mathbf{J}=\int_0^1\mathbf{x}\mathbf{e}^{\mathbf{x}^2-1}\mathbf{dx}\qquad (\mathbf{x}^2-1)'=2\mathbf{x}$$

$$\mathbf{J}=\int_0^1\mathbf{x}\mathbf{e}^{\mathbf{x}^2-1}\mathbf{dx}=\int_0^1\frac{1}{2}2\mathbf{x}\mathbf{e}^{\mathbf{x}^2-1}\mathbf{dx}=\frac{1}{2}\int_0^1 2\mathbf{x}\mathbf{e}^{\mathbf{x}^2-1}\mathbf{dx}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(\mathbf{x}^2-1)'\mathbf{e}^{\mathbf{x}^2-1}\mathbf{dx}=\frac{1}{2}\left[\mathbf{e}^{\mathbf{x}^2-1}\right]_0^1$$

$$\mathbf{J}=\frac{1}{2}\left[\mathbf{e}^{\mathbf{x}^2-1}\right]_0^1=\frac{1}{2}(\mathbf{e}^0-\mathbf{e}^{-1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\mathbf{e}})$$

D'où $\mathbf{J}=\frac{\mathbf{e}-1}{2\mathbf{e}}$

2) a – Vérifier que $\frac{1}{\mathbf{x}}-\frac{1}{\mathbf{x}+1}=\frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+1)}\quad \forall\mathbf{x}\in[1,2]$

$$\frac{1}{\mathbf{x}}-\frac{1}{\mathbf{x}+1}=\frac{\mathbf{x}+1-\mathbf{x}}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+1)}=\frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+1)}$$

b – Calculer l'intégrale $\int_1^2\frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+1)}\mathbf{dx}$

$$\int_1^2\frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+1)}\mathbf{dx}=\int_1^2\frac{1}{\mathbf{x}}-\frac{1}{\mathbf{x}+1}\mathbf{dx}$$
$$=\left[\ln|\mathbf{x}|-\ln|\mathbf{x}+1|\right]_1^2=\ln 2-\ln 3-(\ln 1-\ln 2)$$

D'où $\int_1^2\frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+1)}\mathbf{dx}=2\ln 2-\ln 3$

c – En utilisant une intégration par parties calculer :

$$\mathbf{K}=\int_1^2\frac{\ln(\mathbf{x}+1)}{\mathbf{x}^2}\mathbf{dx}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})=\ln(\mathbf{x}+1)\qquad \mathbf{u}'(\mathbf{x})=\frac{(\mathbf{x}+1)'}{\mathbf{x}+1}=\frac{1}{\mathbf{x}+1}$$

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x})=\frac{1}{\mathbf{x}^2}=\mathbf{x}^{-2}\qquad \mathbf{v}(\mathbf{x})=\frac{\mathbf{x}^{-2+1}}{-2+1}=\frac{\mathbf{x}^{-1}}{-1}=-\frac{1}{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{K}=\int_1^2\frac{\ln(\mathbf{x}+1)}{\mathbf{x}^2}\mathbf{dx}=\left[-\frac{\ln(\mathbf{x}+1)}{\mathbf{x}}\right]_1^2-\int_1^2-\frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+1)}\mathbf{dx}$$

$$\mathbf{K}=-\frac{\ln 3}{2}+\frac{\ln 2}{1}+\int_1^2\frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+1)}\mathbf{dx}$$
$$=\ln 2-\frac{\ln 3}{2}+2\ln 2-\ln 3=3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$$

D'où $\mathbf{K}=3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$

Exercice 3 :

I - Résoudre dans C l'équation : $\mathbf{z}^2-6\mathbf{z}+12=0$

$\mathbf{z}^2-6\mathbf{z}+12=0$

$\Delta=6^2-4\times 12=-12<0$

$=(\mathrm{i}\,2\sqrt{3})^2$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\mathbf{z}_1=\frac{6+\mathbf{i}2\sqrt{3}}{2}=3+\mathbf{i}\sqrt{3}\quad\text{et}\quad \mathbf{z}_2=\overline{\mathbf{z}_1}=3-\mathbf{i}\sqrt{3}$$

D'où $\mathbf{S}=\left\{3-\mathbf{i}\sqrt{3};3+\mathbf{i}\sqrt{3}\right\}$

II - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O};\vec{\mathbf{u}};\vec{\mathbf{v}})$ on considère les points A, B et Ω d'affixes respectives $\mathbf{a}=3+\mathbf{i}\sqrt{3}$ et $\mathbf{b}=3-\sqrt{3}+\mathbf{i}(3+\sqrt{3})$ et $\boldsymbol{\omega}=4$

1) Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe **a**.

$\mathbf{a}=3+\mathbf{i}\sqrt{3}$

$$|\mathbf{a}|=\left|3+\mathbf{i}\sqrt{3}\right|=\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\mathbf{a}=3+\mathbf{i}\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$\mathbf{a}=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathbf{i}\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\mathbf{a}=\left[2\sqrt{3};\frac{\pi}{6}\right]$$

2) Soit z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par l'homothétie h de centre Ω et de rapport $(1+\sqrt{3})$.

a – Montrer que : $z'=(1+\sqrt{3})z-4\sqrt{3}$

$$\mathrm{h(M)=M'}\Leftrightarrow z'-4=(1+\sqrt{3})(z-4)$$
$$\Leftrightarrow z'-4=(1+\sqrt{3})z-4(1+\sqrt{3})$$
$$\Leftrightarrow z'=(1+\sqrt{3})z-4\sqrt{3}-4+4=(1+\sqrt{3})z-4\sqrt{3}$$

D'où $z'=(1+\sqrt{3})z-4\sqrt{3}$

b – En déduire que B est l'image du point A par l'homothétie h.

$$\mathrm{h}(\mathbf{A})=\mathbf{B}\Leftrightarrow \mathbf{b}=(1+\sqrt{3})\mathbf{a}-4\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{b}=(1+\sqrt{3})(3+\mathbf{i}\sqrt{3})-4\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{b}=3+\mathrm{i}\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3\mathbf{i}-4\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{b}=3-\sqrt{3}+\mathbf{i}(\sqrt{3}+3)$$

3) Montrer que l'affixe du point C l'image du point A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est :

$$\mathbf{c}=-\sqrt{3}+3\mathbf{i}$$

$$R(A)=C \Leftrightarrow c-z_O=e^{i\frac{\pi}{2}}(a-z_O)$$
$$\Leftrightarrow c=(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})(3+i\sqrt{3})$$
$$\Leftrightarrow c=i(3+i\sqrt{3})=-\sqrt{3}+3i$$

D'où $c=-\sqrt{3}+3i$

4) Vérifier que : $b=a+c$ en déduire que OABC est un carré.

$a+c=3+i\sqrt{3}-\sqrt{3}+3i=3-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+3)=b$

D'où $b=a+c$

On a $b=a+c \Leftrightarrow b-c=a \Leftrightarrow b-c=a-z_O$

$\Leftrightarrow b-c=a-z_O \Leftrightarrow aff(\overrightarrow{CB})=aff(\overrightarrow{OA})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}$

Donc OABC est un parallélogramme

Or $R(A)=C \Leftrightarrow OA=OC$ et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où OABC est carré.

5) Montrer que $|b|=2\sqrt{6}$ et $\arg(b)\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$

$|b|=|3-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+3)|=\sqrt{(3-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}+3)^2}$

$|b|=\sqrt{9-6\sqrt{3}+3+9+6\sqrt{3}+3}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

D'où $|b|=2\sqrt{6}$

On a $a=\left[2\sqrt{3};\frac{\pi}{6}\right]$ donc $\arg(a)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Or $\arg(a)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc $(\vec{u};\overrightarrow{OA})\equiv\arg(a)[2\pi]$

Donc $(\vec{u};\overrightarrow{OA})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

On a $[OB]$ est une diagonale du carré OABC

Donc $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ Or $\arg(b)\equiv(\vec{u};\overrightarrow{OB})[2\pi]$

$(\vec{u};\overrightarrow{OB})\equiv(\vec{u};\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})[2\pi]$

$(\vec{u};\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}[2\pi]$ d'où $(\vec{u};\overrightarrow{OB})\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$

6) En déduire que b^6 est un nombre imaginaire pur.

On a $|b|=2\sqrt{6}$ et $\arg(b)\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$

Donc $b=\left[2\sqrt{6};\frac{5\pi}{12}\right]$ donc $b^6=\left[2\sqrt{6};\frac{5\pi}{12}\right]^6$

Donc $b^6=\left[\left(2\sqrt{6}\right)^6;6\frac{5\pi}{12}\right]=\left[\left(2\sqrt{6}\right)^6;\frac{5\pi}{2}\right]$

Donc $b^6=\left[\left(2\sqrt{6}\right)^6;2\pi+\frac{\pi}{2}\right]=\left[\left(2\sqrt{6}\right)^6;\frac{\pi}{2}\right]$

Donc $b^6=\left(2\sqrt{6}\right)^6(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=i\left(2\sqrt{6}\right)^6$

D'où b^6 est un nombre imaginaire pur.

Problème :

Partie I :

On considère la fonction f définie sur ℝ par :

$g(x)=x-1+e^{2x}$

1) a) Calculer: $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}g(x)$

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}x-1+e^{2x}=+\infty$

car $\lim_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}x-1+e^{2x}=-\infty$

car $\lim_{x\to-\infty}e^{2x}=0$ et $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$

b) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau des variations

$g(x)=x-1+e^{2x}$

$g'(x)=1+2e^{2x}\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=1+2e^{2x}>0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) Montrer que $g(x)\le 0\quad \forall x\in]-\infty;0]$ et $g(x)\ge 0\quad \forall x\in[0;+\infty[$ (remarquer que g(0) = 0)

On sait que g est croissante sur ℝ

$\forall x\in]-\infty,0]$ donc $x\le 0$ donc $g(x)\le g(0)$

D'où $g(x)\le 0\quad \forall x\in]-\infty,0]$

$\forall x\in[0,+\infty[$ donc $x\ge 0$ donc $g(x)\ge g(0)$

D'où $g(x)\ge 0\quad \forall x\in[0,+\infty[$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur ℝ par :

$f(x)=x^2-2x+e^{2x}$

1) a - Calculer: $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ et montrer $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2-2x+e^{2x}=+\infty$

Car $\lim_{x\to-\infty}x^2-2x=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}e^{2x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2-2x+e^{2x}$

$=\lim_{x\to+\infty}x(x-2)+e^{2x}=+\infty$

Car $\lim_{x\to+\infty}x(x-2)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$

b - Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ et interpréter les résultats géométriquement

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+e^{2x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}x-2+\frac{e^{2x}}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x-2+2\frac{e^{2x}}{2x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}x-2=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+e^{2x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x-2+\frac{e^{2x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}x-2+\frac{1}{x}e^{2x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}x-2=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}e^{2x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$$

D'où (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2) a – Montrer que $f'(x)=2g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=x^2-2x+e^{2x}$$

$$f'(x)=2x-2+2e^{2x}=2(x-1+e^{2x})=2g(x)$$

D'où $f'(x)=2g(x)$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

On a $f'(x)=2g(x)$

$g(x)\geq 0 \quad \forall x\in[0,+\infty[$ **donc** $f'(x)\geq 0 \quad \forall x\in[0,+\infty[$

$g(x)\leq 0 \quad \forall x\in]-\infty,0]$ **donc** $f'(x)\leq 0 \quad \forall x\in]-\infty,0]$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f′(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

c) Montrer que y = 1 est l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0

On a $y=f'(0)(x-0)+f(0) \quad f(0)=1$ et $f'(0)=0$

Donc $y=1$

d – En déduire que $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

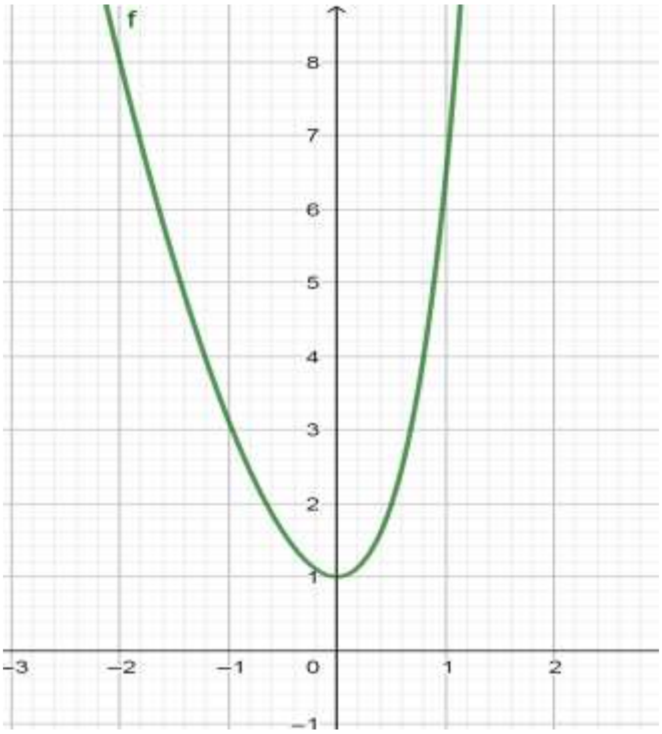
$f(0)=1$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$

On a $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)\geq f(0)$

Donc $f(x)\geq 1\geq 0$

D'où $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

3) Tracer la courbe (C_f).



Partie III :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1}=U_n^2+e^{2U_n} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0=1$$

1) Montrer que : $U_n\geq 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n = 0 on a $U_0=1$ donc $U_0\geq 1$

Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $U_n\geq 1$ et montrons que $U_{n+1}\geq 1$

$$U_n\geq 1\Rightarrow U_n^2\geq 1\Rightarrow U_{n+1}\geq 1 \quad e^{2U_n}>0$$

D'où $U_n\geq 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) a – Montrer que $U_{n+1}\geq 2U_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

On a $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc $x^2-2x+e^{2x}\geq 0\Leftrightarrow x^2+e^{2x}\geq 2x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc $U_n^2+e^{2U_n}\geq 2U_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

D'où $U_{n+1}\geq 2U_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

b – Montrer que la suite (U_n) est croissante.

On a $U_{n+1}\geq 2U_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$U_{n+1}-U_n\geq 2U_n-U_n$$

Donc $U_{n+1}-U_n\geq U_n$ or $U_n\geq 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc $U_{n+1}-U_n\geq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

D'où la suite (U_n) est croissante

3) a – Montrer que : $U_n \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n = 0 on a $U_0 = 1$ et $2^0 = 1$ donc $U_0 \geq 2^0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n \geq 2^n$ et montrons que $U_{n+1} \geq 2^{n+1}$

On a $U_n \geq 2^n$ donc $2U_n \geq 2 \times 2^n \Leftrightarrow 2U_n \geq 2^{n+1}$

Or $U_{n+1} \geq 2U_n$ donc $U_{n+1} \geq 2U_n \geq 2^{n+1}$

Donc $U_{n+1} \geq 2^{n+1}$

D'où $U_n \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b – Calculer $\lim U_n$

on a $U_n \geq 2^n$ et $\lim 2^n = +\infty$ $\quad 2 > 1$

d'où $\lim U_n = +\infty$