0.1 Continuité en un point - Continuité sur un intervalle

0.1.1 Continuité en un point

Définition 1

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I, et $x_0 \in I$.
On dit que f est continue au point x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

0.1.2 Continuité à droite et à gauche en un point.

Définition 2

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[x_0;x_0+\alpha[$; $\left(]x_0-\alpha;x_0]\right)$ où $\alpha > 0$

$*$ On dit f est continue à droite (à gauche) en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$: $\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)\right)$

Propriété

La fonction f est continue en x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

0.1.3 Continuité sur un intervalle.

Définition 3

On dit qu'une fonction f est continue sur $[a,b]$ si elle est continue en tout élément de l'intervalle $]a,b[$ et continue à droite en a et à gauche en b

Remarque

De la même façon,On définit la continuité d'une fonction sur les intervalles $[a,b[$,$]a,b]$,$[a,+\infty[$ et $]-\infty,b]$

0.1.4 Continuité des fonctions usuelles

Conséquence

Les fonctions polynômes , Rationnelles ;$x \to \sqrt{x}$;$x \to \cos x$;$x \to \sin x$ *et* $x \to \tan x$; sont continue sur chaque intervalle inclus dans leur ensemble de définition

0.1.5 Opération sur les fonctions Continue

Propriété

Si f et g sont continues sur I, alors : $f+g$, $f\times g$; kf sont continues sur I
Si f et g sont continues sur I,avec $\left(\forall x\in I, g(x)\neq 0\right)$ alors : $\frac{f}{g}$; $\frac{1}{g}$ sont continues sur I

0.2 Image d'un intervalle par une fonction continue.

Définition

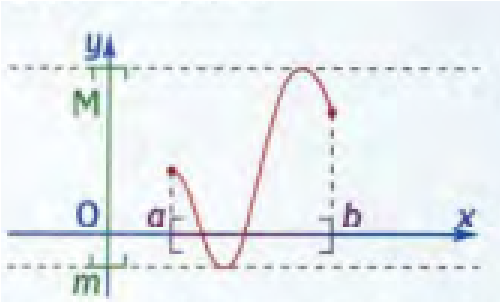
L'image d'un intervalle I par une fonction f est l'ensemble de tous les nombres avec x dans I. On note $f(I)$.

Propriété 1

L'image d'un segment (intervalle) par une fonction continue est un segment (intervalle).

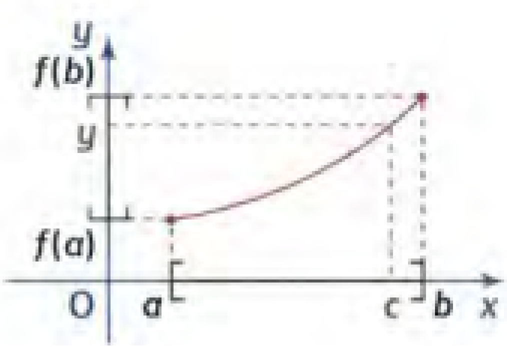
Info

$f([a;b])=[m;M]$ avec $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$



0.2.1 Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I ; On a les résultats suivants

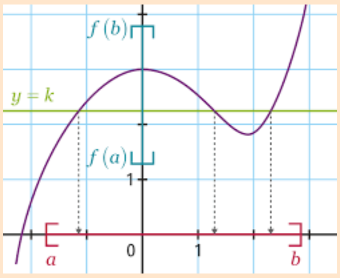


	L'image de $f(I)$	
	f est strictement croissante	**f est strictement décroissante**
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a;b[$	$\left[f(a);\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$]-\infty;a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);f(a)\right]$	$\left[f(a);\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

0.3 Théorème des valeurs intermédiaires.

Propriété

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$;alors $\forall k \in f([a;b])$, il existe au moins une un réel c dans l'intervalle $[a;b]$, tel que $f(c) = k$



Conséquence 1

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.

Conséquence 2

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$;alors pour tout $k \in f([a;b])$, il existe une seul réel $c \in [a;b]$, tel que $f(c) = k$

0.4 Continuité de la composée de deux fonctions.

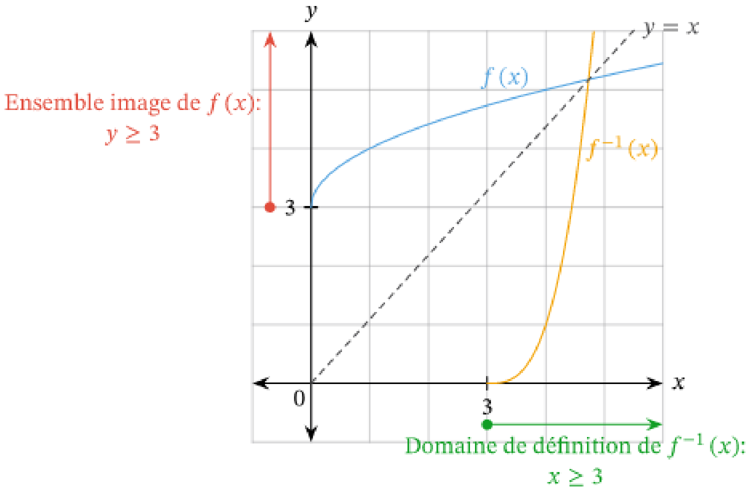
Conséquence 2

Soit f une fonction continue sur I et g une fonction continue sur J et tel que $f(I) \subset J$, alors gof est continue sur I

0.5 Fonction réciproque

Propriété 1

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I , alors f admet une fonction réciproque,notée f^{-1} définie sur $f(I) = J$ vers I



Propriété 2

※
$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases}$$

※ $(\forall x \in I)\,;f^{-1} \circ f(x) = x$

※ $(\forall x \in f(I))\,;f \circ f^{-1}(x) = x$

※ La fonction f^{-1} est continue et monotonie sur $f(I)$.

※ Cf^{-1} est symétrique de Cf par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

0.6 Fonction racine n- iéme

Définition

La fonction réciproque de la fonction définie sur $[0+\infty[$; par: $x \mapsto x^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$ est appelée fonction racine n-ième; notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

Propriété

※ La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0+\infty[$; et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

※ les deux courbes C_f et C_f^{-1} sont symétrique par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

Propriété

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall (a;b) \in \mathbb{R}_+^2$

♣ $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b} \quad \Leftrightarrow \quad a=b$

♣ $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b} \quad \Leftrightarrow \quad a<b$

♣ $\sqrt[n]{a^n}=a$

Propriété (Opérations sur les racines nième)

$\forall (n;m)\in\mathbb{N}^* \quad$ et $\quad \forall (a;b)\in\mathbb{R}_+^2$

♣ $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$

♣ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad Si \quad (b\neq 0)$

♣ $\sqrt[nm]{a^m}=\sqrt[n]{a}$ et $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$

♣ $\sqrt[n]{\dfrac{1}{b}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{b}} \quad (si \quad b\neq 0)$

Propriété

$p\in\mathbb{Z}^*$; $p\in\mathbb{N}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}^+$: $\quad \sqrt[q]{x^p}=x^{\frac{p}{q}}$

Cas particulier: $\quad \sqrt[q]{x}=x^{\frac{1}{q}} \quad et \quad \sqrt[2]{x}=x^{\frac{1}{2}}$

0.7 L'équation $x^n=a/n\in\mathbb{N}^*;x\in\mathbb{R};a\in\mathbb{R}$

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n est paire	$x=\sqrt[n]{a} \quad ou \quad x=-\sqrt[n]{a}$	$x=0$	
n est impaire	$x=\sqrt[n]{a}$	$x=0$	$x=-\sqrt[n]{\lvert a\rvert}$

Des Remarques

$a\in\mathbb{R}^*{}_+$; $b\in\mathbb{R}^*{}_+$

$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} \quad / \quad \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$