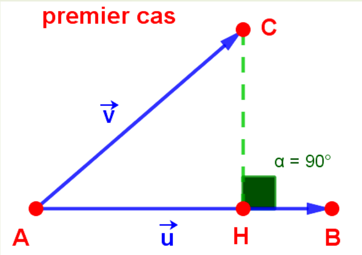
I. Produit scalaire dans l'espace :

a. Définition :

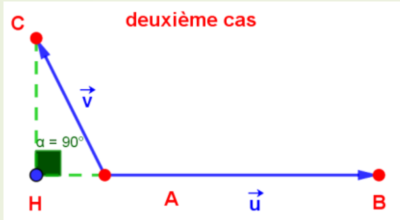
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul de l'espace $(\mathscr{E})$; A et B et C trois points de $(\mathscr{E})$ tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$; H est la projection de C sur la droite (AB) .

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté par $\vec{u}.\vec{v}$ ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ tel que :

1^{ER} cas le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre : $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$



$2^{ième}$ cas le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre : $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$



Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ on a $\vec{u}.\vec{v}=0$

b. Remarques :

- $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2$ est le carré scalaire de $\vec{u}$ est toujours positif .
- $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=AB$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ on note : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=AB$.
- $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$.
- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire) $\Leftrightarrow|\vec{u}.\vec{v}|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

c. Propriétés :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$; $\alpha\in\mathbb{R}$ on a :

1. $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$
2. Symétrie du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$.
3. Positivité du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2\geq 0$.
4. Non dégénère : $\vec{u}.\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$
5. Linéarité du produit scalaire : $\begin{cases}\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}\\(\vec{v}+\vec{w}).\vec{u}=\vec{v}.\vec{u}+\vec{w}.\vec{u}\\\vec{u}.(\alpha\vec{v})=(\alpha\vec{u}).\vec{v}=\alpha(\vec{u}.\vec{v})\end{cases}$
6. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ et $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ et $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$.

d. Application :

Soit $ABCD$ un tétraèdre de faces régulières (chaque face est un triangle équilatéral de coté a pour longueur

- Montrer que deux cotés opposés sont orthogonaux (exemple le coté opposé de $[AB]$ est le coté $[DC]$.

Correction :

On montre que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

On a :

- ✓ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a\times a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a^2}{2}\ (1)$.
- ✓ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB\times AD\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=a\times a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a^2}{2}\ (2)$.
- ✓ D'où : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)$

$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\quad \text{(d'après } (1) \text{ et } (2) \text{)}.$$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$

Conclusion : $(AB)\perp(CD)$. (De la même façon on démontre que : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}=0$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$)

II. Base et repère orthonormé :

a. Rappel :

$\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ et $\vec{w}(x'',y'',z'')$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$ rapporté a une base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

- Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cet ordre est le nombre :

$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x' & x''\\ z' & z''\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}$$

$$=(xy'z''-xz'y'')+(-yx'z''+yz'x'')+(zx'y''-zy'x'')$$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=0$.

b. Exemple :

$\vec{u}(1,2,3)$ et $\vec{v}(-2,0,1)$ et $\vec{w}(1,0,3)$ on a :

$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=1\times0-2\times(-7)+3\times0=14$$

D'où : $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\neq 0$

Conclusion :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas sont coplanaires donc le triplet $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ est une base de l'espace $(\mathscr{E})$.
- On prend un point O de l'espace $(\mathscr{E})$ le quadruplet $\left(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ est un repère de l'espace $(\mathscr{E})$.

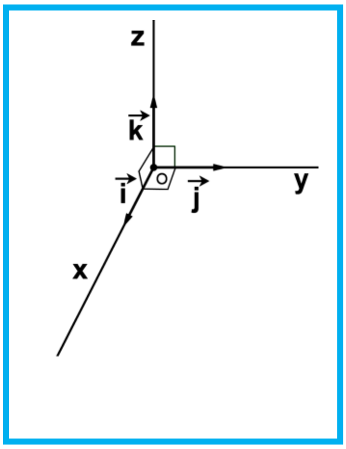
c. Technique :

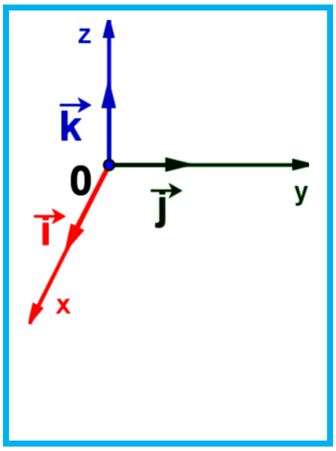
$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}\begin{matrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{matrix}=(1)+(2)+(3)-(4)-(5)-(6)$$

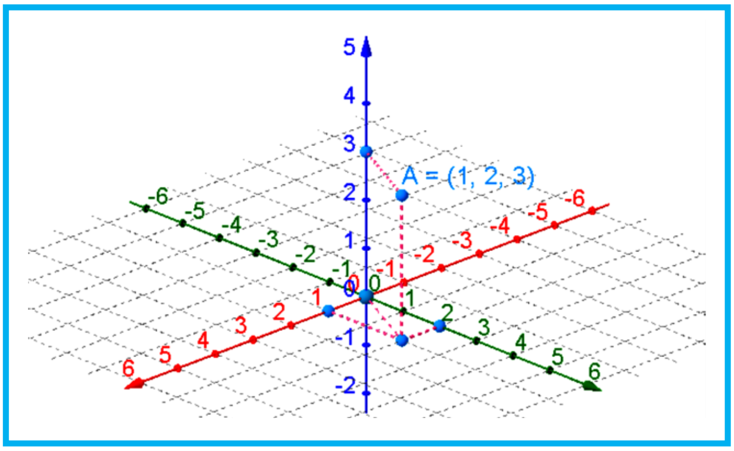
(4) (5) (6) (1) (2) (3)

d. Définitions :

- $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est une base de l'espace $(\mathscr{E})$ équivaut à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaire $\left(\det\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)\neq 0\right)$
- Prenons un point O de l'espace $(\mathscr{E})$ le quadruplé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est appelé repère de $(\mathscr{E})$
- Si $\vec{k}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{i}=0$ et $\|\vec{j}\|=\|\vec{i}\|=\|\vec{k}\|=1$ alors :
  - la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est une base orthonormée .
  - le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est un repère orthonormé .







- Le reste de ce chapitre ; on considère l'espace $(\mathscr{E})$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

- On prend $\vec{u}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}(x',y',z')=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ et $M(x,y,z)$ et $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ et $C(x_C,y_C,z_C)$.

III. Expression analytique de $\vec{u}.\vec{v}$

a. Activité :

1. On a : $\vec{u}.\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right).\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$ on utilise la linéarité du produit scalaire donner $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction de x et y et z et x' et y' et z'.
2. Ecrire $\left\|\vec{u}\right\|$ en fonction de x et y et z.
3. Donner la distance $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ en fonction de x_A et y_A et z_A et de x_B et y_B et z_B .
4. Donner la propriété .

b. Propriété :

- Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $\vec{u}.\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=xx'+yy'+zz'$.
- La norme du vecteur $\vec{u}$ est : $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- La distance AB est : $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$.

c. Application :

$\vec{u}(1,2,3)$ et $\vec{v}(5,7,4)$ deux vecteurs et $A(1,5,7)$ et $B(2,9,8)$ deux points de l'espace $(\mathscr{E})$.

1. Calculons : $\vec{u}.\vec{v}$ et $\left\|\vec{u}\right\|$ et $\left\|\vec{v}\right\|$ et AB .

Correction :

1. Calculons :

✓ $\vec{u}.\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5\\7\\4\end{pmatrix}=1\times5+2\times7+3\times4=31$.

✓ $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ et $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{5^2+7^2+4^2}=\sqrt{88}$.

✓ On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\9-5\\8-7\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ d'où : $AB=\sqrt{1^2+4^2+1^2}=\sqrt{18}$.

Conclusion : $\vec{u}.\vec{v}=31$ et $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{14}$ et $\left\|\vec{v}\right\|=\sqrt{88}$ et $AB=\sqrt{18}$.

IV. Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que : $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=k$ avec $\vec{u}(a,b,c)$; $(\vec{u}\neq\vec{0})$:

a. Propriété :

$A(x_A,y_A,z_A)$ est un point et $\vec{u}(a,b,c)$ est un vecteur non nul de l'espace $(\mathscr{E})$ et $k\in\mathbb{R}$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$ est un plan (P) d'équation de la forme : $ax+by+cz+d=0$.

b. Application :

Soient $A(1,1,1)$ et $\vec{u}(0,1,0)$.

1. On détermine (P) ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$

Correction :

On a :

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow 0.(x-1)+1(y-1)+0(z-1)=0$$
$$\Leftrightarrow y-1=0$$

Conclusion : ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$ est le plan d'équation (P) : $y=1$.

V. Plan déterminer par un point et un vecteur normal :

01. Vecteur normal à un plan :

a. Définition :

Tout vecteur $\vec{n}$ non nul sa direction est perpendiculaire au plan (P) s'appelle vecteur normal au plan (P) .

b. Remarques :

- $\vec{n}$ est normale au plan $P(A,\vec{u},\vec{v})$ alors $\vec{n}\perp\vec{u}$ et $\vec{n}\perp\vec{v}$.
- Si $\vec{n}$ est normale au plan (P) et passe par A le plan (P) est noté par $P(A,\vec{n})$.

02. Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $ax+by+cz+d=0$:

a. Propriété :

L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie $ax+by+cz+d=0$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ est le plan et le vecteur non nul $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal à ce plan .

b. Application :

- Que représente l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie $x+2y-z+4=0$.

Repense : l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ est le plan (P) tel que :

- ✓ le vecteur $\vec{n}(1,2,-1)$ est normal à (P) .
- ✓ le plan (P) passe par le point $A(0,0,4)$.
- ✓ donc $(P)=P(A,\vec{n})$.

03. Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$:

a. Propriété :

$\vec{n}(a,b,c)\neq\vec{0}$ est un vecteur non nul et $A(x_A,y_A,z_A)$ est un point de l'espace $(\mathscr{E})$.

L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est le plan (P) qui passe par A et le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à ce plan (c.à.d. $P(A,\vec{n})$) .

Le plan (P) a pour équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$

b. Application :

On détermine une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(2,1,-3)$ et $\vec{n}(1,1,2)$ est un vecteur normal à (P) .

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace $(\mathscr{E})$.

On a : $M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z+3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\times1+(y-1)\times1+(z+3)\times2=0$$

$$\Leftrightarrow x+y+2z+3=0$$

Conclusion : équation cartésienne de (P) est $(P)\ :\ x+y+2z+3=0$.

c. Propriété :

tout plan $P\left(A,\vec{n}(a,b,c)\right)$ a pour équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ la réciproque avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

d. Preuve :

On montre que : le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est normal à ce plan (P) .

On a : $M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0\quad;(1)$

$A(x_0,y_0,z_0)\in(P)\Leftrightarrow ax_0+by_0+cz_0+d=0\quad;(2)$

La différence entre (1) et (2) on obtient :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$$

D'où : $\vec{n}(a,b,c)$ est normal à ce plan .

e. Application :

1. On donne l'équation du plan $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et le point $A(0,0,m)$ avec $m\in\mathbb{R}$.

1ère méthode :

$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$ et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont coplanaires

$$\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{i},\vec{j}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-0&1&0\\y-0&0&1\\z-m&0&0\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}+(z-m)\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 0-0+(z-m)=0$$

$$\Leftrightarrow z-m=0$$

Conclusion : équation du plan $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right):z=m$.

2ième méthode :

Puis que le repère est orthonormé donc $\vec{k}(0,0,1)$ est normal au plan $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ donc équation de $P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est de la forme $0\times x+0\times y+1\times z+d=0$ ou encore $z+d=0$

On sait que : $A(0,0,m)\in P\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)\Leftrightarrow m+d=0$ donc $d=-m$.

Conclusion : équation du plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$ est $P(O,\vec{i},\vec{j})$: $z = m$.

3[ième] méthode :

Puis que le repère est orthonormé donc $\vec{k}(0,0,1)$ est normal au plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in (P) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{k}=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-m \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-0)\times 0 + (y-0)\times 0 + (z-m)\times 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z - m = 0 \end{aligned}$$

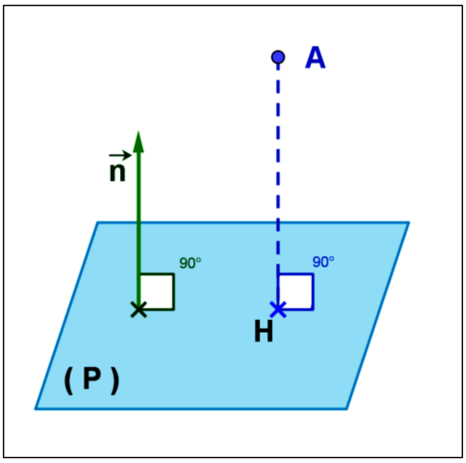
Conclusion : équation du plan $P(O,\vec{i},\vec{j})$ est $P(O,\vec{i},\vec{j})$: $z = m$.

VI. Distance d'un point à un plan :

a. Définition :

(P) est un plan et A est un point de l'espace $(\mathscr{E})$ et H est la projection orthogonale de A sur le plan (P) la distance du point A au plan (P) est AH et on note $AH = d(A,(P))$.

b. Exemple :



c. Propriété :

(P) est un plan et $A(x_A,y_A,z_A)$ est un point de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que (P) a pour équation (P) : $ax+by+cz+d=0$.

La distance du point A au plan (P) est $AH = d(A,(P)) = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

d. Preuve :

On considère $H(x_H,y_H,z_H)$ H est la projection orthogonale de A sur le plan (P).

- On sait que : le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est normal à ce plan (P) ($\vec{n} \perp (P)$) (1)

- H est la projection orthogonale de A sur le plan (P) donc $\overrightarrow{AH} \perp (P)$. (2)
- $H \in (P) \Leftrightarrow ax_H + by_H + cz_H + d = 0$; donc : $ax_H + by_H + cz_H = -d$.
- D'après (1) et (2) on obtient $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires , d'où $\left|\cos\left(\overline{\overrightarrow{AH},\vec{n}}\right)\right| = 1$ et

$$\left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right| = AH\left\|\vec{n}\right\|\left|\cos\left(\overline{\overrightarrow{AH},\vec{n}}\right)\right| = AH\left\|\vec{n}\right\| \text{ on obtient } \left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right| = AH\left\|\vec{n}\right\| \quad (4)$$

- D'autre part : le produit scalaire est :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AH}.\vec{n} &= \begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \\ z_H - z_A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&= a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) + c(z_H - z_A) \\
&= ax_A + by_A + cz_A - \left(\underbrace{ax_H + by_H + cz_H}_{-d}\right) \\
&= ax_A + by_A + cz_A + d
\end{aligned}$$

D'où : $\left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right| = \left|ax_A + by_A + cz_A + d\right| \quad (3)$

D'après (3) et (4) on obtient $AH\left\|\vec{n}\right\| = \left|ax_A + by_A + cz_A + d\right|$

D'où : $AH = \dfrac{\left|ax_A + by_A + cz_A + d\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$.

e. Application :

On considère le plan d'équation $(P)x + 3y - 5z + 1 = 0$.

1. Est –ce que : $A(1,1,1) \in (P)$

   On a : $(P)1 + 3\times1 - 5\times1 + 1 = 4 - 5 + 1 = 0$ d'où : $A(1,1,1) \in (P)$

2. Donner la distance $d(A,(P))$

   1ère méthode :

   ✓ Puis que $A(1,1,1) \in (P)$ donc la projection orthogonale de A sur le plan (P) est $A = H$

   Donc $AH = AA = 0$ donc $d(A,(P)) = 0$.

   Conclusion : la distance $d(A,(P)) = 0$.

   2ième méthode :

   ✓ On applique la propriété :

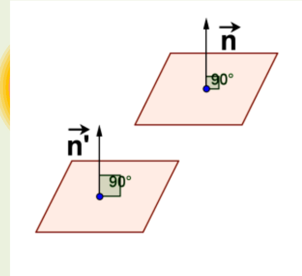
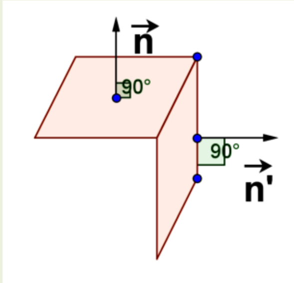
$$AH = d(A,(P)) = \frac{\left|ax_A + by_A + cz_A + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \left|\frac{1 + 3\times1 - 5\times1 + 1 = 4 - 5 + 1}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-5)^2}}\right| = \left|\frac{0}{35}\right| = 0$$

   Conclusion : la distance $d(A,(P)) = 0$

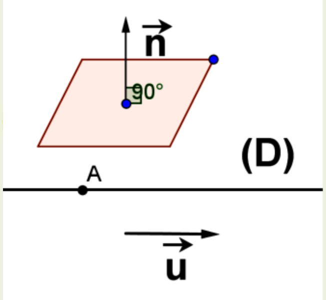
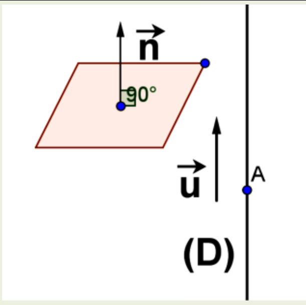
VII. Parallélisme et orthogonalité des droites et des plans :

01. Parallélisme et orthogonalité de deux plans :

a. Propriétés :

$(P_1): ax+by+cz+d=0$ et $(P_2): a'x+b'y+c'z+d'=0$		
$(P_2)\parallel(P_1) \Leftrightarrow$ ($\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires) $(P_2)\parallel(P_1) \Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ (non nuls) $(P_2)\parallel(P_1) \Leftrightarrow \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0\,(\vec{n}$ et $\vec{n'})$	$(P_2)\parallel(P_1) \Leftrightarrow \vec{n'}=\alpha\vec{n}$  	$(P_2)\perp(P_1) \Leftrightarrow \vec{n'}.\vec{n}=0$ 

02. Parallélisme et orthogonalité d'une droite et un plan :

$P(B,\vec{n})$ et $D(A,\vec{u})$ et $(P): ax+by+cz+d=0$		
$(D)\parallel(P) \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}=0$ $(D)\perp(P) \Leftrightarrow$ ($\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires)	 	

VIII. Etude analytique du sphère :

01. Sphère :

a. Définition :

Ω est un point donné de l'espace $(\mathcal{E})$ et $R>0$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que $\Omega M=R$ s'appelle le sphère de centre Ω et de rayon R on note (S) ou $S(\Omega,R)$.

02. Equation cartésienne d'une sphère :

a. Définition propriété :

Equation cartésienne de $(S)=S(\Omega(a,b,c),r)$ est : $M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow \Omega M=R$ ou

$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=R^2$ ou bien : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ avec $d=a^2+b^2+c^2-R^2$

b. Application :

On donne l'équation cartésienne du sphère $S(O(0,0,0),1)$

on a : $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=1^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1$.

Conclusion : l'équation cartésienne du sphère $S(O(0,0,0),1)$ est $x^2+y^2+z^2=1$.

03. Equation cartésienne du sphère déterminé par un diamètre $[AB]$.

a. Définition :

Ω est le milieu de $[AB]$; $[AB]$ est un diamètre du sphère (S) donc A et B appartiennent à (S)
On dit la sphère de diamètre $[AB]$ on note (S) ou $S_{[AB]}$.

b. Propriété :

Equation cartésienne de $S_{[AB]}$ est : $M(x,y,z)\in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$
ou bien $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$.

c. Preuve :

Soit I le milieu de $[AB]$ (centre du sphère (S) .

On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0\\
&\Leftrightarrow MI^2+\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}.\left(-\overrightarrow{IA}\right)=0\\
&\Leftrightarrow MI^2+\overrightarrow{MI}.\vec{0}-IA^2=0\\
&\Leftrightarrow MI^2=IA^2\\
&\Leftrightarrow MI=IA\\
&\Leftrightarrow M\in S_{(I,r=IA)}
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ c'est le sphère (S) de centre I le milieu de $[AB]$ et de rayon $r=IA=\frac{AB}{2}$ ou encore le sphère $S_{[AB]}$ de diamètre $[AB]$

d. Exemple :

Soient $A(0,1,0)$ et $B(0,-1,0)$ deux points de l'espace $(\mathscr{E})$.

On détermine l'équation cartésienne du sphère $S_{[AB]}$:

$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in S_{[AB]} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \;;\; \left(\text{ou } \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\right)\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x\\ y-1\\ z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x\\ y+1\\ z\end{pmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1
\end{aligned}$$

Conclusion : l'équation cartésienne du sphère $S_{[AB]}$ est $S_{[AB]}: x^2+y^2+z^2=1$.

04. L'ensemble des $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$:

a. Propriété :

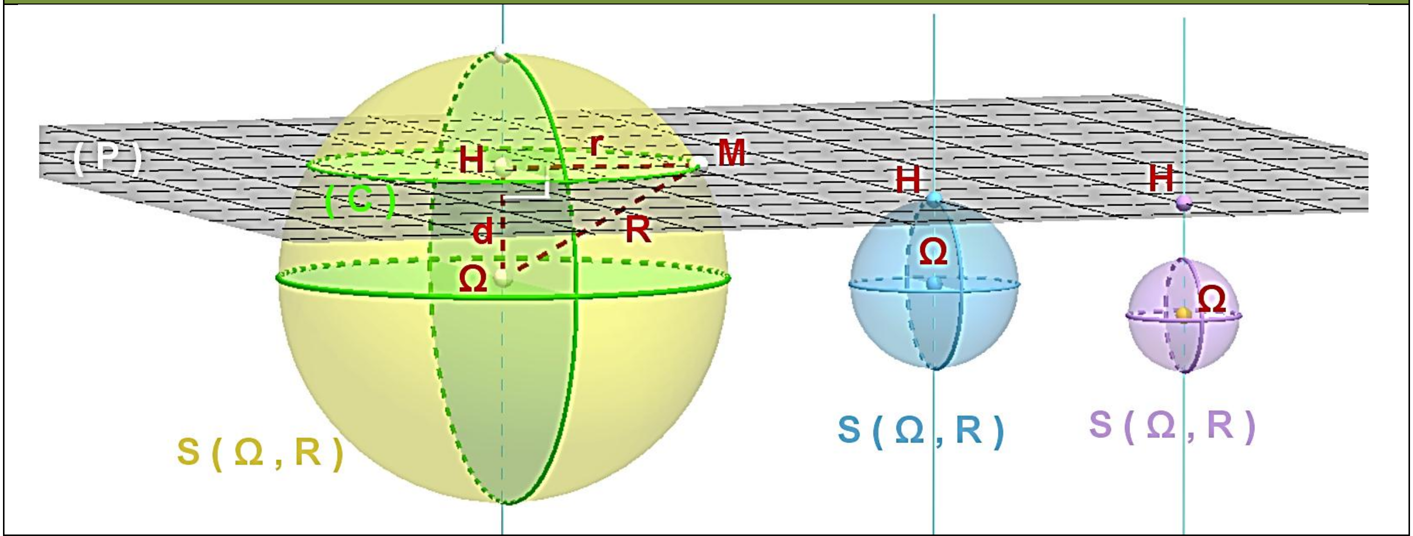
L'ensemble des $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ avec a et b et c et d de $\mathbb{R}$ on pose $A=a^2+b^2+c^2-4d$ est :

- $(E)=\varnothing$ si $A<0$.
- $(E)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)\right\}$ si $A=0$.
- Le Sphère $(E)=S\left(\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right),R=\frac{\sqrt{A}}{2}\right)$ si $A>0$.

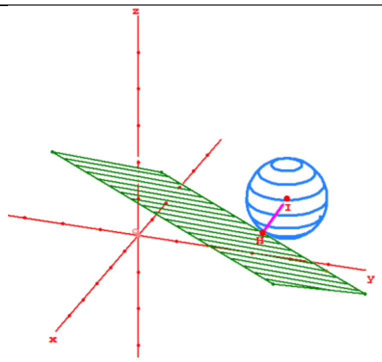
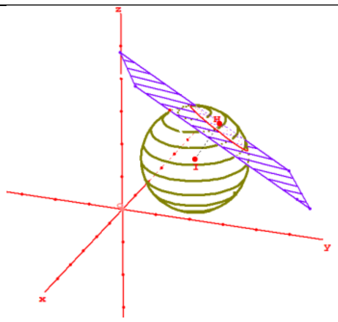
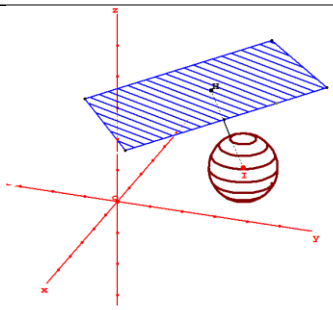
IX. Positions relatives d'une sphère et un plan :

01. Positions et les schémas et théorème:

a. Intersection d'un plan (P) et une sphère (S)



b. Théorème :

$3^{\text{ième}}$ CAS : $d=\Omega H<R$ on a $(P)\cap(S)=(C)$ (P) coupe (S) suivant le cercle de centre H et de rayon $R_C=\sqrt{R_S{}^2-d^2}$ $R_C=r$ et $R_S=R$	$2^{\text{ième}}$ CAS : $d=\Omega H=R$ on a $(P)\cap(S)=\{H\}$ (P) et (S) sont tangents en H avec $(H\Omega)\perp(P)$	1^{ER} CAS : $d=\Omega H>R$ on a $(P)\cap(S)=\varnothing$ (P) et (S) son disjoints
		

a. Remarques :

- H est la projection de Ω sur (P) et $d = \Omega H = d(\Omega,(P)) = \dfrac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
- on détermine H par l'intersection du plan (P) et la droite (D) perpendiculaire au plan passant par Ω
- Vecteur normal $\vec{n}$ au plan (P) est un vecteur directeur de la droite (D) .

02. Equation du plan tangent à une sphère :

a. Théorème :

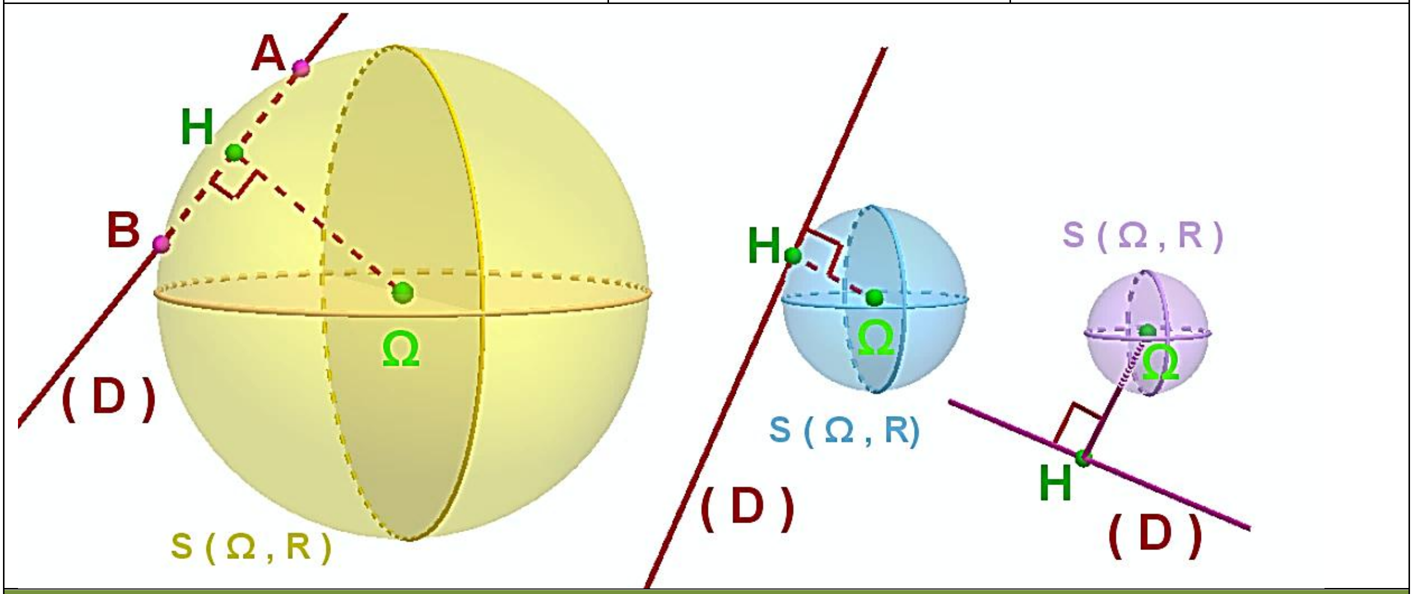
par un point A quelconque d'une sphère (S) il existe un et un seul plan (Q) tangente au sphère (S) au point A . l'équation de (Q) est : $M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$

X. Positions relatives d'une sphère et une droite :

01. Positions et les schémas et théorème :

a. Intersection d'une droite (D) et une sphère (S)

$3^{ième}$ CAS :	$2^{ième}$ CAS	1^{ER} CAS :



b. théorème

$3^{ième}$ CAS : $(D)\cap(S) = \{A,B\}$	$2^{ième}$ CAS / $(D)\cap(S) = \{H\}$	1^{ER} CAS : $(D)\cap(S) = \varnothing$
(D) coupe (S) en deux points A et B (Deux points mais pas le segment $[AB]$)	(D) et (S) sont tangents en H avec $(H\Omega) \perp (D)$	(P) et (S) son disjoints
CONDITION : $d = \Omega H < R$	CONDITION : $d = \Omega H = R$	CONDITION : $d = \Omega H > R$

REMARQUES	• H est la projection de Ω sur (D) . • Si $(D) = D(K,\vec{u})$ on a $d = \Omega H = \dfrac{\|\overrightarrow{K\Omega} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ (voir chapitre produit vectoriel) .