# I. Fonction logarithme népérienne :

## a. Activité :

On considère la fonction définie par : $\begin{cases} f\ :\ ]0,+\infty[ \to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

1. Est-ce que admet une fonction primitive sur $]0,+\infty[$ ? ( justifier votre réponse ) .
2. Combien de fonctions primitives $F$ tel que $F(1)=0$ ?

## b. Définition :

La fonction primitive $F$ de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 $\left(F(1)=0\right)$ s'appelle La fonction logarithme népérienne et note $F(x)=\ell n(x)$ ou $F(x)=\ln x$. Avec

$F'(x)=f(x) \Leftrightarrow (\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

## c. Remarque :

Au lieu d'écrire $F(x)=\ln x$ on écrit $f(x)=\ln x$.

## d. Conséquences :

- $\ln 1 = 0$
- La fonction $f(x)=\ln x$ est définie sur $]0,+\infty[$ .
- La fonction $f(x)=\ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ ( car $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ ).
- La fonction $f(x)=\ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$ ( car la fonction logarithme népérienne est dérivable ).
- La fonction $f(x)=\ln x$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ ( car $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}>0$ ).
- En déduit $\forall a,b \in ]0,+\infty[, a<b \Leftrightarrow \ln(a)<\ln(b)$ et $\forall a,b \in ]0,+\infty[, a=b \Leftrightarrow \ln(a)=\ln(b)$ .

## e. Exercice :

- Déterminons le domaine de définition de la fonction $f(x)=\dfrac{3}{\ln x}$ .

On a : $x \in D_f \Leftrightarrow x>0 \text{ et } \ln x \neq 0$

$\Leftrightarrow x>0 \text{ et } \ln x \neq \ln 1$

$\Leftrightarrow x>0 \text{ et } x \neq 1$

$\Leftrightarrow x \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$

Conclusion : $D_f = ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$ ou $D_f = ]0,+\infty[ \setminus \{1\}$.

- Déterminons le domaine de définition de la fonction $f(x)=\sqrt{\ln x}$ .

On a : $x \in D_f \Leftrightarrow x>0 \text{ et } \ln x \geq 0$

$\Leftrightarrow x>0 \text{ et } \ln x \geq \ln 1$

$\Leftrightarrow x > 0$ et $x \geq 1$

$\Leftrightarrow x \in [1,+\infty[$

Conclusion : $D_f = [1,+\infty[$.

- Résoudre l'équation suivante : $(E)$ : $\ln(2x) - \ln(x-1) = 0$.

  - On détermine $D_E$ l'ensemble de définition de l'équation $(E)$.

$x \in D_E \Leftrightarrow 2x > 0$ et $x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ et $x > 1$

$\Leftrightarrow x > 1$

Conclusion 1 : $D_E = ]1,+\infty[$ .

On résout l'équation dans $D_E$

$\ln(2x) - \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x) = \ln(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x = x - 1$

$\Leftrightarrow x = -1 \notin D_E = ]1,+\infty[$

Conclusion 2 : l'équation $(E)$ n'a pas de solution donc $S = \varnothing$

- Résoudre l'équation suivante : $(E')$ : $\ln(2x) - \ln(x-1) = 0$.

  - On détermine $D_{E'}$ l'ensemble de définition de l'inéquation $(E')$.

D'après la question précédente on a : $D_{E'} = ]1,+\infty[$ .

On résout l'équation dans $D_{E'}$

$\ln(2x) - \ln(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(2x) \leq \ln(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x \leq x - 1$

$\Leftrightarrow x \leq -1$

$\Leftrightarrow x \in ]-\infty,-1]$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty,-1] \cap D_{E'} = ]-\infty,-1] \cap ]1,+\infty[ = \varnothing$

Conclusion 2 : l'inéquation $(E')$ n'a pas de solution donc $S = \varnothing$

**f.** Signe de $\ln x$ :

Soit : $x \in ]0,+\infty[$ on a trois cas :

- 1er cas : $x = 1$ donc : $\ln 1 = 0$ .
- 2ième $x \in ]1,+\infty[$ , donc : $x > 1 \Rightarrow \ln x > \ln 1$ ( c.à.d. $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$ ( car $\ln 1 = 0$ ) ).
- 3ième cas $x \in ]0,1[$ , donc : $x < 1 \Rightarrow \ln x < \ln 1$ ( c.à.d. $x < 1 \Rightarrow \ln x < 0$ )
- D'où le signe de $\ln x$ par un tableau

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

## II. Propriétés algébriques :

### a. Propriétés :

Pour tous $a>0$ et $b>0$ et $r\in\mathbb{Q}$ on a :

1. $\ln ab=\ln a+\ln b$ ( propriété admise ) .
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$.
3. $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$.
4. $\ln a^{r}=r\ln a$ .

### b. Preuve pour la 2ième et la 3ième :

- **Pour la 2ième :**

On a : $0=\ln 1\Leftrightarrow 0=\ln\frac{a}{a}$

$$\Leftrightarrow 0=\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0=\ln a+\ln\left(\frac{1}{a}\right) \quad ;\ (\text{propiété n° } 1)$$

$$\Leftrightarrow -\ln a=\ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

Conclusion : $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$

- **Pour la 3ième :**

$$\ln\frac{a}{b}=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)$$

On a : $=\ln a+\ln\frac{1}{b}$

$=\ln a-\ln b \quad$ ; ( propiété n° 2 )

Conclusion : $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

### c. Remarque :

- $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\times\ln a$ et $\ln\left(\sqrt[3]{a}\right)=\frac{1}{3}\times\ln a$.
- On écrit :
  - $\ln(x)\times\ln(x)=\ln^{2}(x)$ .
  - On général : $n\in\mathbb{N}^{*}$ on a : $\underbrace{\ln(x)\times\ln(x)\times\cdots\times\ln(x)}_{n\text{ fois}}=\ln^{n}(x)=\ln^{n}x$

**d. Exemple :**

**1.** On pose $\ln 2 = 0,7$ et $\ln 3 = 1,1$ ;calculons : $\ln 4$ et $\ln 8$ et $\ln\sqrt{3}$ et $\ln\sqrt[3]{2}$ et $\ln\sqrt[3]{3^5}$. On a :

- $\ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2 = 2\times 0,7 = 1,4$ donc : $\ln 4 = 1,4$.
- $\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2 = 3\times 0,7 = 2,1$ donc : $\ln 8 = 2,1$.
- $\ln\sqrt[3]{2} = \ln 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ln 2 = \frac{1}{3}\times 0,7 \simeq 0,233$ donc : $\ln 8 = 2,1$.
- $\ln\sqrt{3} = \ln 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\times 1,1 = 0,55$ donc : $\ln\sqrt{3} = 0,55$.
- $\ln\sqrt[3]{3^5} = \ln 3^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}\ln 3 = \frac{5}{3}\times 1,1 \simeq 1,833$.

**2. Simplifier :**

$$\ln^2\left(3-\sqrt{2}\right)-\ln^2\left(3+\sqrt{2}\right)=\left(\ln\left(3-\sqrt{2}\right)+\ln\left(3+\sqrt{2}\right)\right)\times\left(\ln\left(3-\sqrt{2}\right)-\ln\left(3+\sqrt{2}\right)\right)$$

$$=\ln\left[\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)\right]\times\ln\left(\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right)$$

$$=\ln\left(9-2\right)\times\ln\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)}{9-2}$$

$$=\ln 7\times\ln\frac{9-6\sqrt{2}+2}{7}=\ln 7\times\ln\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$$ ; ( on ne peut pas simplifier )

**Conclusion :** $\ln^2\left(3-\sqrt{2}\right)-\ln^2\left(3+\sqrt{2}\right)=\ln 7\times\ln\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$.

## III. Limites :

**a. Propriétés :**

| | | |
|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ | $\lim\limits_{x\to 0^+} x\times\ln(x)=0^-$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0$ | $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\times\ln(x)=0^-$ |
| $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$ | $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ | |

**b. Remarques :**

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$. Donc la courbe $(C_f)$ de f admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation $x=0$ ( l'axe des ordonnées ) .
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ Donc la courbe $(C_f)$ de f admet une branche parabolique ( à déterminer ).
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ .Donc la courbe $(C_f)$ de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses .

c. Application :

1. Calculer : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{x}$.

On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{x+2}\times\frac{x+2}{x}=0$ car :

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{x+2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ ( avec $t=x+2$ et $x\to+\infty$ alors $t\to+\infty$ ) .
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x}=1$.

Conclusion : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{x}=0$

2. Calculer : $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x\times\ln x}$.

On a : $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln x=0^-$ ( propriété ) d'où $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x\times\ln x}=-\infty$.

Conclusion : $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x\times\ln x}=-\infty$.

3. Calculer : $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x^3}$.

On a : $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{1}{x^2}=+\infty$.

Car $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ ( propriété ) et $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ ; $\left(\lim_{x\to0}x^2=0^+\right)$ .

## IV. Fonction de la forme : $f(x)=\ln(u(x))$

a. Remarque :

On pose : $g(x)=\ln x$ et la fonction $u(x)$ donc : $g\circ u(x)=g(u(x))=\ln(u(x))$.

Conclusion : la fonction $f(x)=\ln(u(x))$ est la composée de deux fonctions .

- Domaine de définition de $f$ est de la manière suivante : $x\in D_f\Leftrightarrow(x\in D_u$ et $u(x)>0)$.
- Si de plus la fonction $u(x)$ est dérivable on a : $[\ln(u(x))]'=\frac{u'(x)}{u(x)}$.
- De même on a : $[\ln(|u(x)|)]'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

b. Démonstration :

- pour $[\ln(u(x))]'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

$$f'(x)=\left[\ln(u(x))\right]'=\left[g(u(x))\right]'=u'(x)\times g'(u(x))=u'(x)\times\frac{1}{u(x)} \text{ car } g'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

**Conclusion :** $\left[\ln(u(x))\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

- **Pour** $\left[\ln(|u(x)|)\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

**1^er^ cas** $|u(x)|=u(x)$ **déjà démontrer .**

**2^ième^ cas** $|u(x)|=-u(x)$

**on a :** $\left[\ln(|u(x)|)\right]'=\left[\ln(-u(x))\right]'=(-u(x))'\times\ln'(-u(x))=-u'(x)\times\dfrac{1}{-u(x)}=\dfrac{u(x)}{u(x)}$.

**Conclusion :** $\left[\ln(|u(x)|)\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

**c. Exemple :**

Calculons $f'$ avec $f(x)=\ln|x^2-x|$ .

On a : $f'(x)=\left[\ln|x^2-x|\ \right]'=\dfrac{(x^2-x)'}{x^2-x}=\dfrac{2x-1}{x^2-x}$ .

**d. Vocabulaire et remarque :**

- Soit $f$ fonction dérivable sur $I$ et $\forall x\in I\ :\ u(x)\neq 0$.
  La fonction $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est appelée la dérivée logarithmique de la fonction $u$ sur $I$ .
- Puis que $\left[\ln(|u(x)|)\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc les fonctions primitives de la fonction $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur $I$ sont les fonctions de la forme $F(x)=\ln|u(x)|+c$ avec $c\in\mathbb{R}$ .

**e. Exemple :**

- Trouver les fonctions primitives de la fonction $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$ sur $]2,+\infty[$ .

On a : $f(x)=\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{(x-2)'}{x-2}$ .

donc : les fonctions primitives de la fonction $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$ sont les fonctions de la forme

$F(x)=\ln|x-2|+c$ avec $c\in\mathbb{R}$ , puis que $x\in]2,+\infty[$ donc $F(x)=\ln(x-2)+c$ avec $c\in\mathbb{R}$.

**Conclusion :** les fonctions primitives de la fonction $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$ sont $F(x)=\ln(x-2)+c$ avec $c\in\mathbb{R}$.

- Trouver la fonction dérivée logarithmique de la fonction $u(x)=3x^2-5x$.

La fonction dérivée logarithmique de $u$ est fonction suivante $x \to \frac{6x-5}{3x^2-5x}$.

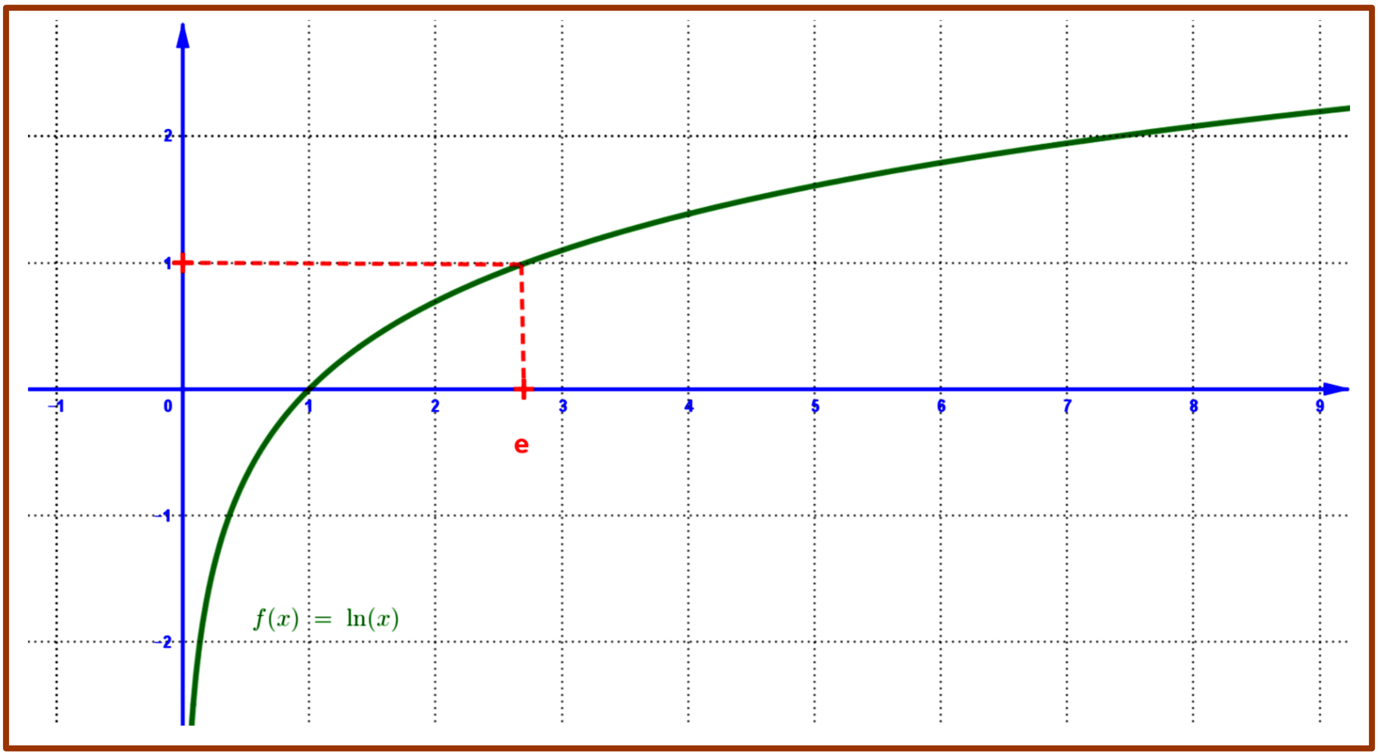
## V. Etude de la fonction $f(x)=\ln x$ :

- Domaine de définition : $D_f = ]0,+\infty[$ .
- Continuité : f est continue sur $D_f = ]0,+\infty[$ .
- Limites :
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ . Donc la courbe $(C_f)$ de $f$ admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation $x=0$ ( l'axe des ordonnées ) .
  - $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ Donc la courbe $(C_f)$ de $f$ admet une branche parabolique on détermine :

    $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $a = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .Donc la courbe $(C_f)$ de $f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses .
- Sens de variation de $f$ .
  - La fonction dérivée de $f$ est : $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$
  - La fonction est strictement croissante sur $D_f = ]0,+\infty[$
  - Tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ ↗ | $0$ | ↗ $+\infty$ |

- La courbe représentative de $f$ :



❖ **Remarque :**

- La fonction $f(x)=\ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$ .
- La fonction $f(x)=\ln x$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- Donc : $f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$ donc l'équation $x\in]0,+\infty[$ ; $f(x)=1$ admet une solution et une seule on note ce nombre unique par $e\simeq 2,718$ ( valeur approché ) qui est un nombre irrationnel .
- **Conclusion :** $\ln e=1$ et $\ln\frac{1}{e}=-1$ et $\ln e^{r}=r$ ; $(r\in\mathbb{Q})$ .
- **Application :** on détermine l'ensemble de définition de $f(x)=\dfrac{1}{3-\ln(x)}$ .

$$\begin{aligned} x\in D_f &\Leftrightarrow x>0 \text{ et } 3-\ln(x)\neq 0\\ &\Leftrightarrow x>0 \text{ et } \ln(x)\neq 3\\ &\Leftrightarrow x>0 \text{ et } \ln(x)\neq \ln e^{3}\\ &\Leftrightarrow x>0 \text{ et } x\neq e^{3}\end{aligned}$$

D'où : ensemble de définition de $f$ est : $D_f=]0,e^{3}[\cup]e^{3},+\infty[$ .

## VI. Fonction logarithme de base $a$ et propriétés :

### A. Fonction logarithme de base $a$ :

#### a. Définition :

Soit $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$ ( c.à.d. a strictement positif et différent de 1 ) .

La fonction définie par :

$$f\ :\ ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$$
$$x\to f(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

S'appelle la fonction logarithme de base $a$ , on note cette fonction par $f=\log_a$ d'où : $f(x)=\log_a(x)$ .

#### b. Conséquences :

- $\log_a(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ et $\log_a(1)=\dfrac{\ln(1)}{\ln(a)}=0$.
- $\log_a(a)=\dfrac{\ln(a)}{\ln(a)}=1$ et $\log_a(e)=\dfrac{\ln(e)}{\ln(a)}=\dfrac{1}{\ln(a)}$ .

#### c. Cas particuliers :

- Cas $a=e$ : $\log_e(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(e)}=\ln(x)$ donc logarithme de base $a=e$ est le logarithme népérienne .
- Cas $a=10$ : on obtient la fonction $f(x)=\log_{10}(x)$ s'appelle la fonction logarithme décimale on note $\log_{10}=\mathrm{Log}$ d'où : $f(x)=\log_{10}(x)=\mathrm{Log}(x)$ .
- $\mathrm{Log}(10^{r})=r$ ; $\mathrm{Log}(10)=1$ ; $\mathrm{Log}(1)=0$.

## B. Propriétés logarithme de base $a$ :

### a. Propriétés :

Soit $a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$ et pour tout $x$ et $y$ de $]0,+\infty[$ on a :

- $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ .
- $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$ .
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ .
- $\log_a(x^r) = r \times \log_a(x)$ avec $r \in \mathbb{Q}$ .
- $\log_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \times \log_a(x)$ et $\log_a(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3} \times \log_a(x)$ .

### b. Démonstration :

Démonstration pour $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ .

On a : $\log_a(x \times y) = \frac{\ln(x \times y)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x) + \ln(y)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} + \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \log_a(x) + \log_a(y)$

Conclusion : $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ .

## C. Etude de la fonction : $f(x) = \log_a(x)$ :avec $f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

- Domaine de définition de $f$ : $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$ d'où $D_f = ]0,+\infty[$ .
- Continuité de $f$ : $f$ est continue sur $]0,+\infty[$ .
- Limites aux bornes de $D_f$ :
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \begin{cases} +\infty \text{ si } a \in ]1,+\infty[ \\ -\infty \text{ si } a \in ]0,1[ \end{cases}$ .
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \begin{cases} -\infty \text{ si } a \in ]1,+\infty[ \\ +\infty \text{ si } a \in ]0,1[ \end{cases}$
- Sens de variations de $f$ :
  - Dérivée : $f'(x) = (\log_a(x))' = \left[\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right]' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$ . d'où : $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$ .
  - $f'(x) \begin{cases} \geq 0 \text{ si } a \in ]1,+\infty[ \\ \leq 0 \text{ si } a \in ]0,1[ \end{cases}$ .
  - Tableau de variations de $f$ .

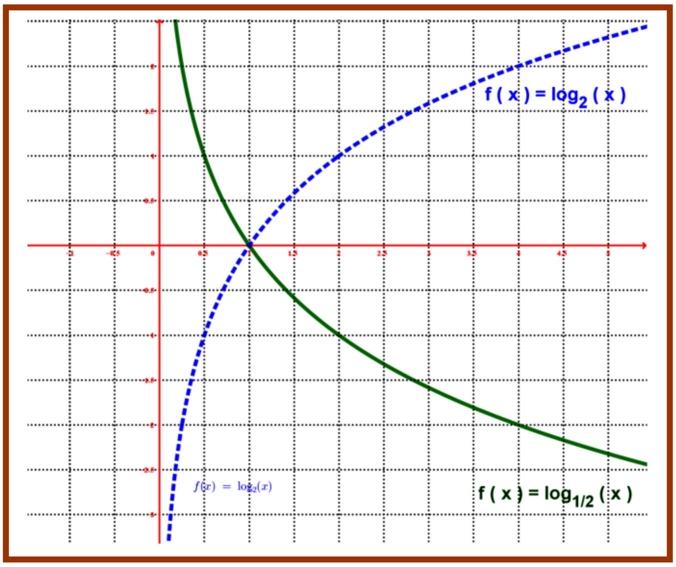
Cas $a \in ]1,+\infty[$ :

| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f ' | \|\| | + | |
| f | \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ 0 | $\nearrow$ $+\infty$ |

cas $a \in ]0,1[$ :

| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f ' | \|\| | + | |
| f | \|\| $+\infty$ | $\searrow$ 0 | $\searrow$ $-\infty$ |

- Courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $a = 2$ et $a = \frac{1}{2}$.




c. Exercices :

1. On simplifie :

$$\log_2(8) - \log_2\left(\sqrt[3]{32}\right) + \log_2(9) - \log_2(3) = \log_2\left(2^3\right) - \log_2\left(2^{\frac{5}{3}}\right) + \log_2\left(3^2\right) - \log_2(3)$$

$$= 3 - \frac{5}{3} + 2\log_2(3) - \log_2(3)$$

$$= \frac{4}{3} + \log_2(3)$$

2. On simplifie :

$$\log_3\left(\frac{15}{4}\right) + \log_2\left(\frac{1}{27}\right) + \log_3\left(\frac{4}{5}\right) = \log_3\left(\frac{15}{4} \times \frac{4}{5}\right) + \log_2\left(3^3\right)$$

$$= \log_3 3 - \log_2 3^3$$

$$= 1 - \log_2 27$$

$$= \log_2(2) - \log_2(27)$$

$$= \log_2\left(\frac{2}{27}\right)$$

**3. On simplifier :**

$$\log(100)-\log\left(10^{2013}\right)+\log\left(\frac{1}{10^{100}}\right)=\log 10^{2}-\log 10^{2019}-\log 10^{100}$$
$$=2\log 10-2019\log 10-100\log 10$$
$$=-2117\log 10$$

**4. Montrer que :** $\forall a,b\in ]1,+\infty[\ ;\ \log_b(a)=\dfrac{1}{\log_a(b)}$

On a : $\dfrac{1}{\log_a(b)}=\dfrac{1}{\dfrac{\ln b}{\ln a}}=\dfrac{\ln a}{\ln b}=\log_b(a)$ .

Conclusion : $\forall a,b\in ]1,+\infty[\ ;\ \log_b(a)=\dfrac{1}{\log_a(b)}$ .

**5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ :** l'équation suivante $\log_3(2x)\times\left(\log_5(x)-1\right)=0$ .

- On détermine domaine de définition de l'équation :
  On a ;
  $$x\in D_E \Leftrightarrow 2x>0 \text{ et } x>0$$
  $$\Leftrightarrow x>0$$
  $$\Leftrightarrow x\in ]0,+\infty[$$
  Donc domaine de définition de l'équation est $D_E=]0,+\infty[$ .
- On résout l'équation dans $D_E=]0,+\infty[$ :
  $$\log_3(2x)\times\left(\log_5(x)-1\right)=0 \Leftrightarrow \log_3(2x)=0 \text{ ou } \left(\log_5(x)-1\right)=0$$
  $$\Leftrightarrow \log_3(2x)=\log_3(1) \text{ ou } \log_5(x)=1$$
  $$\Leftrightarrow 2x=1 \text{ ou } x=1$$
  $$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\in D_E \text{ ou } x=1\in D_E$$

**Conclusion :** ensemble des solutions de l'équation est $S=\left\{\dfrac{1}{2},1\right\}$ .

**6.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante $\log_{\sqrt{3}}(3x-1)\geq\log_{\sqrt{3}}(x+1)$ .

- On détermine domaine de définition de l'inéquation :
  On a ;
  $$x\in D_{E'} \Leftrightarrow 3x-1>0 \text{ et } x+1>0$$
  $$\Leftrightarrow x>\frac{1}{3} \text{ et } x>-1$$
  $$\Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$$
  $$\Leftrightarrow x\in \left]\frac{1}{3},+\infty\right[$$

Donc domaine de définition de l'équation est $D_{E'} = \left]\frac{1}{3},+\infty\right[$ .

- On résout l'équation dans $D_{E'} = \left]\frac{1}{3},+\infty\right[$ :

$$\log_{\sqrt{3}}(3x-1) \geq \log_{\sqrt{3}}(x+1) \Leftrightarrow 3x-1 > x+1 \;;\; \left(\text{car } a=\sqrt{3}>1\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x > 2$$
$$\Leftrightarrow x > 1$$
$$\Leftrightarrow x \in ]1,+\infty[$$

**Conclusion:** ensemble des solutions de l'inéquation est $S = D_{E'} \cap ]1,+\infty[ = \left]\frac{1}{3},+\infty\right[ \cap ]1,+\infty[ = ]1,+\infty[$

7. Etudier la fonction suivante : $f(x) = \log_5(x+1)$

- Domaine de définition de $f$ :

$$x \in D_E \Leftrightarrow x+1>0$$
$$\Leftrightarrow x > -1$$
$$\Leftrightarrow x \in ]-1,+\infty[$$

domaine de définition de $f$ est $D_{E'} = ]-1,+\infty[$

- Limites aux bornes de $D_f$ :

  ✓ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \log_5(x+1) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln 5} = -\infty$ .

  car $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(x+1) = -\infty$ ; $\left(\lim\limits_{x\to -1^+} x+1 = 0^+\right)$ et $\ln 5 > 0$

  ✓ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \log_5(x+1) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln 5} = +\infty$ .

  car $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ ; $\left(\lim\limits_{x\to -1^+} x+1 = +\infty\right)$ et $\ln 5 > 0$

- Branches infinies ;

  ✓ Puis que $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ donc la courbe $(C_f)$ admet une asymptote verticale la droite d'équation $x=-1$ .

  ✓ On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ on détermine $a = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\ln(x+1)}{\ln 5}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x\ln 5} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{1}{\ln 5} = 0$$

Car : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0 \left(x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty\right)$

D'où : la courbe $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées .

- **Sens de variations de f :**
  - ✓ **Fonction dérivée de f :**

$$f'(x)=\left(\log_5(x+1)\right)'=\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln 5}\right)'=\frac{1}{\ln 5}\times\frac{(x+1)'}{x+1}=\frac{1}{\ln 5}\times\frac{1}{x+1}>0 \text{ car } x\in\left]-1,+\infty\right[$$

  - ✓ **Tableau de variations de f :**

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $+$ | |
| $f$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- **La courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$**