

## Exercices d'applications et de réflexions : fonctions exponentielles

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre (2BAC PC et SVT)

# FONCTIONS EXPONENTIELLES

**Exercice1** : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

1)  $\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$  2)  $\exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right)$

**Exercice2** : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

1)  $e^{1-x} \times e^{2x} = e$  2)  $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1}$

3)  $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$  4)  $e^{x^2} \cdot (e^x)^3 = (e^{-x})^5 \cdot e^{-7}$

5)  $e^{2x-3} - (e+1)e^{x-2} + 1 < 0$

**Exercice3** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^x$  2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{x}$  3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3}$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 2}$  5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1}$  6)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1}$

7)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + e^{-x}$  8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}}$  9)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

10)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - e^x$  11)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2}$  12)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x}$

13)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - e^x$  14)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3}$

15)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$  (on pose :  $2x = X$ ) 16)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x}$

17)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x + 1}$  18)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x-1)e^x$

19)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 4x^3)e^x$  20)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$

21)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x)e^{2x}$  22)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$

23)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$  24)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - 1}{x-1}$

25)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$  26)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$

**Exercice4** : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes : 1)  $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$

2)  $g(x) = e^{-2x^2} - 3e^{3x+1}$  3)  $h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4)  $f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$

**Exercice5** : Déterminer les primitives des

fonctions suivantes : 1)  $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

2)  $g(x) = (e^x)^2$  3)  $h(x) = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$

**Exercice6** : Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1)  $I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$

2)  $I = ]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$

3)  $I = \mathbb{R}; f(x) = e^x (e^x - 1)^3$

4)  $I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$

5)  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$   $I = ]0; +\infty[$

**Exercice7 :** Considérons la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = (x-1)e^x$$

- 1) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 2) Etudier les branches infinies de la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$
- 3) Etudier la concavité de la courbe  $C_f$
- 4) Construire la courbe  $C_f$ .

**Exercice8 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{par : } f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1}$$

- 1) déterminer  $D_f$  et calculer les limites aux bornes de  $D_f$

2) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

3) montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$

- 4) Etudier les branches infinies de la courbe  $C_f$  Et étudier la position de la courbe  $C_f$  avec les asymptotes obliques

**Exercice9 :** Considérons la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$$

- 1) déterminer  $D_f$  et calculer les limites aux bornes de  $D_f$

2) montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$

3) Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

4) montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) f'(x) = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$

- 5) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 6) Etudier les branches infinies de la courbe  $C_f$  Au voisinage de  $+\infty$
- 7) calculer :  $f(2\ln 2)$  et construire la courbe  $C_f$ .

**Exercice10:** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{par : } f(x) = \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}$$

- 1) déterminer  $D_f$  et calculer les limites aux bornes de  $D_f$

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

- 3) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 4) construire la courbe  $C_f$ .

**Exercice11 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{par : } f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

- 1) déterminer  $D_f$  et calculer les limites aux bornes de  $D_f$

2) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

3) montrer que  $f$  admet une fonction réciproque définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera

- 4) déterminer :  $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

**Exercice12 :** Considérons la fonction  $f$  définie sur

$$\mathbb{R} \text{ par : } f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x}) \text{ et soit } (C) \text{ la courbe}$$

De  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) a) montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  et interpréter géométriquement le résultat

b) montrer que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2) a) vérifier que :  $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$

b) en déduire la droite  $(D)$  d'équation :  $y = x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

c) étudier la position de la courbe  $C_f$  avec la droite  $(D)$

3) a) montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{1}{1 + e^x}$

b) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

c) Etudier la concavité de  $C_f$

d) montrer que la courbe  $C_f$  coupe l'axe des abscisses en un point à déterminer

4) Construire la courbe  $C_f$  dans le repère  $(O; \vec{i} \vec{j})$

5) a) montrer que  $f$  admet une fonction réciproque définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera

b) déterminer :  $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

### Exercice13 :

Partie 1 : Considérons la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$

par :  $f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}}$  si  $x > 0$  et  $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 0.

2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la limite en  $+\infty$

4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .

5) a) Montrer que  $(\forall t > 0) 0 < e^{-t} + t - 1 < \frac{t^2}{2}$

b) En déduire que :  $(\forall x > 0)$

$$\frac{-4}{x} < f(x) - x < \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$$

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

6) Construire la courbe  $C_f$ .

Partie 2 :

Considérons la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f_n(x) = (x+2n)e^{\frac{-2}{x}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0 \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f_n$  à droite de 0.

b) Déterminer la limite en  $+\infty$

c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f_n$

puis dresser le tableau de variation de  $f_n$ .

2) Montrer que l'équation  $f_n(x) = \frac{2}{n}$

admet une solution unique  $\alpha_n$  dans  $]0, +\infty[$

3)a) Montrer que  $(\forall x > 0)$

$$f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$$

b) En déduire la monotonie de  $(\alpha_n)_n$

c) Montrer que la suite  $(\alpha_n)_n$  est convergente et

que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)_n = 0$

Exercice14 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

1)  $5^x = 15$     2)  $3^{2x} \geq 5^{1-x}$     3)  $7^{x+1} - 7^{-x} < 6$

Exercice15 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

1)  $2^{x+1} = 8^x$     2)  $3^x = 12$     3)  $5 \times 2^x + 2^{x+1} - 336 = 0$

4)  $100^x + 40 = 14 \times 10^x$

5)  $2^{x-1} > 4^x$     5)  $(0,5)^{2x} \geq (0,5)^{x+1}$

Exercice16: Déterminer les primitives de la fonction suivante :  $f(x) = 3^{x-2}$

Exercice17: Soit La fonction  $f$  définie par :

$f(x) = 4^x - 2^{x+1}$     1) déterminer  $D_f$

2) calculer les limites aux bornes de  $D_f$

3) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

4) Etudier les branches infinies de la courbe  $C_f$

5) construire la courbe  $C_f$  dans un repère  $(O; \vec{i} \vec{j})$

Exercice 18: Soit La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow x^x, \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1) Etudier la continuité de la fonction  $f$  à droite de 0.

2) Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 0.

3) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

4) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

5) Tracer la courbe  $C_f$ .

6) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f(x) = x$

7) Soit la suite  $(u_n)_n$  définie par :  $u_0 = \frac{1}{e}$

et  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$ .

a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq 1)$

b) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)_n$  ; puis en déduire qu'elle converge.

c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_n$

**Exercice 19 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; considérons la fonction  $f_n$  définie sur  $[1, +\infty[$  par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^n}{x^2} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

et  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Donner le tableau de variation de  $f_1$ .

2. Déterminer l'équation de la tangente  $(T_1)$  à la courbe  $(C_1)$  en point d'abscisse 1.

3. Construire la courbe  $(C_1)$  et la tangente  $(T_1)$  dans le repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

4. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f_n$ .

5. a) Étudier sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  le signe de :

$$f_2(x) - f_1(x)$$

b) En déduire les positions relatives des deux courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  ; puis construire  $(C_2)$

6. Considérons la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  où  $u_n$  est la valeur maximale de la fonction  $f_n$ .

a) Vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{n}{2e} \right)^n$

b) Pour  $x \in ]1, +\infty[$  ; calculer  $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

c) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (u_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}}))$

d) En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (u_n \leq \frac{1}{e} \frac{1}{2^n})$

Et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

