

**Exercice 1 (3 points) :**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0,0,2)$, $B(2,0,0)$ et la sphère (S) de centre O et de rayon $R = 2$

- 0.25 1) a) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S)
- 0.5 b) Vérifier que les points A et B appartiennent à la sphère (S)
- 2) Soit I le milieu du segment $[AB]$.
- 0.25 a) Déterminer l'intersection du plan (OAB) avec la sphère (S)
- 0.5 b) Vérifier que $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ puis montrer que $d(O, (AB)) = \sqrt{2}$
- 3) On considère un point $M(0, m, 0)$ de l'espace, où $m \in \mathbb{R}$
- 0.5 a) Vérifier que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}$
- 0.25 b) Dédire que $mx + 2y + mz - 2m = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABM)
- 0.25 c) Montrer que $d(O, (ABM)) = \frac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}$
- 4) Le plan (ABM) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ_m) de rayon r
- 0.5 Montrer que $r = \sqrt{2 + \frac{4}{2+m^2}}$ et déduire que $\sqrt{2} < r \leq 2$, pour tout $m \in \mathbb{R}$

Exercice 2 (3.5 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A , B , C , D et Ω d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = \bar{a}$, $c = \frac{3(3+i)}{2}$, $d = \frac{3(1+i)}{2}$ et $\omega = \frac{5}{2}$

- 0.5 1) a) Vérifier que $a + b = 2$ et déduire que l'affixe du point P , milieu du segment $[AB]$ est $p = 1$
- 0.5 b) Montrer que a et b sont les solutions de l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0$ dans l'ensemble \mathbb{C}
- 0.5 2) a) Vérifier que $|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|$
- 0.25 b) Dédire que Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC
- 0.25 3) a) Vérifier que $\frac{d-c}{a-b} = \frac{3}{4}i$
- 0.5 b) Montrer que $d - b = (c - a)e^{i\frac{\pi}{2}}$ puis déduire que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires
- 4) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{2}{3}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' . On pose $h(P) = G$
- 0.25 a) Vérifier que $z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$
- 0.25 b) Montrer que l'affixe du point G est $g = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i$
- 0.5 5) Montrer que les points Ω , G et D sont alignés.

Exercice 3 (2.5 points) :

Une urne contient six boules indiscernables au toucher :

Quatre boules blanches numérotées : 0 ; 1 ; 1 ; 1 et deux boules noires numérotées : 0 ; 1

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A « Les deux boules tirées portent le numéro 1 »

B « Les deux boules tirées sont de même couleur »

- 0.5 1) a) Montrer que $p(A) = \frac{2}{5}$
- 0.5 b) Montrer que $p(B) = \frac{7}{15}$
- 0.5 c) Les événements A et B sont - ils indépendants ? justifier.

2) On répète l'expérience précédente trois fois successives. On considère la variable aléatoire X indiquant le nombre de fois que l'on réalise l'événement A .

- 0.75 a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, représentant la loi de probabilités de X

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{27}{125}$			

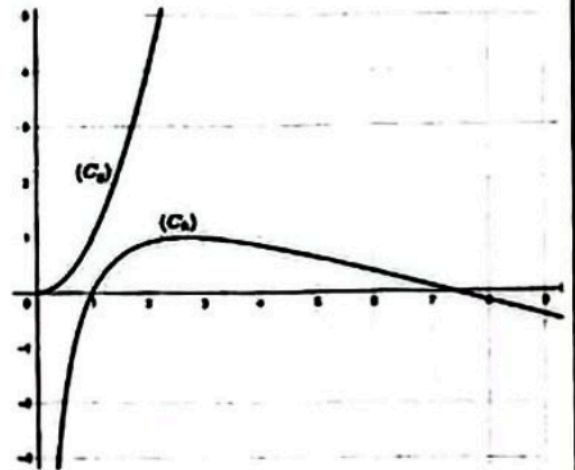
- 0.25 b) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X

Problème (11 points) :

Partie I : Le graphique ci-contre représente les courbes

(C_g) et (C_h) des fonctions : $g : x \mapsto x^2$

et $h : x \mapsto 2 \ln x - (\ln x)^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ dans un même repère orthonormé.



- 0.25 1) a) Justifier graphiquement que pour tout x de $]0, +\infty[$:
- $$g(x) - h(x) > 0$$
- 0.5 b) Dédire que pour tout x de $]0, +\infty[$: $\frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$
- 0.5 2) a) Vérifier que la fonction $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis déduire que $\int_1^{e^2} \ln(x) dx = 1 + e^2$
- 0.5 b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx = 2e^2 - 2$
- 0.5 c) Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ et déduire les deux points d'intersection de la courbe (C_h) avec l'axe des abscisses.
- 0.5 d) Dédire, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_h) , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

Partie II:

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 0.5 1) a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.
- 0.5 b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (On peut poser $t = \sqrt{x}$), puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 0.5 c) Dédire que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 0.75 2) a) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$
- 0.5 b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$
(On peut utiliser la question Partie I-1-b)
- 0.5 3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0, +\infty[$.
- 0.75 b) Vérifier que $e^{-1} < \alpha < 1$ et montrer que $\ln \alpha = -\alpha$.
- 0.25 c) Montrer que $f(x) \leq x$, pour tout $x \in]0, +\infty[$
- 0.5 d) Montrer que $y = x$ est l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1

- 4) Le graphique ci-contre représente la courbe (C_f) dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

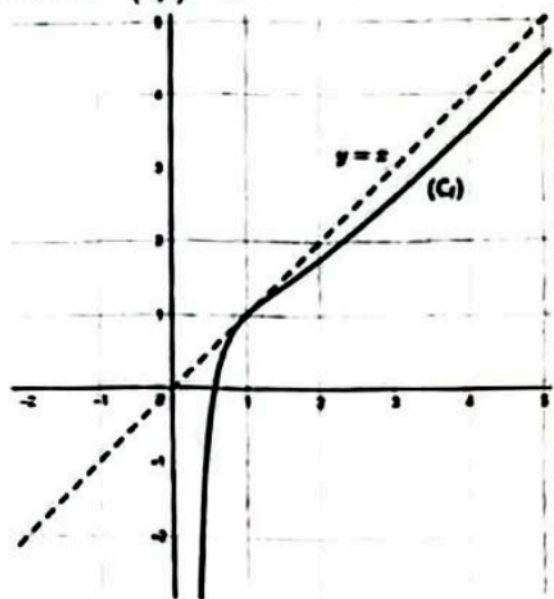
Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $]0, 1]$

- 0.5 a) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
(Il n'est pas demandé de déterminer l'expression $\varphi^{-1}(x)$)

- 0.5 b) Montrer que φ^{-1} est dérivable en 0 et que

$$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{\alpha}{2 + 2\alpha}$$

- 0.75 c) Recopier la courbe de φ et construire la courbe de φ^{-1} dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

**Partie III:**

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout n de \mathbb{N}

- 0.5 1) Montrer par récurrence que $1 < u_n$, pour tout n de \mathbb{N}
- 0.5 2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question Partie II-3-c)
- 0.25 b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 0.5 c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .