Exercices avec solutions : *LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES*

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre (2BAC PC et SVT)

LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice1 : soit l'équation différentielle

$(E) : y'' + 4y = 0$

1)Résoudre l'équation différentielle (E)

2)Déterminer la solution g qui vérifie :

$g(0)=1$ et $g'(0)=2$

solution : $(w=2)$ 1) la solution générale de l'équation différentielle (E) est :

La fonction : $F(x)=a\cos 2x+b\sin 2x$ où α et β sont des réels

2) $F'(x)=-2a\sin 2x+2b\cos 2x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $\begin{cases} F(0)=1 \\ F'(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

Donc : $F(x)=\cos 2x+\sin 2x$

On peut écrire $F(x)$ sous la forme : $F(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice2 : Résoudre les équations différentielles suivantes :1) (E_1): $y'=3y$ 2) (E_2): $y'-y=0$

Solution :1) La solution générale de l'équation différentielle (E_1): est l'ensemble des fonctions :

$x\to y(x)=\lambda e^{3x}$ où λ est un réel.

2) (E_2): $y'-y=0 \Leftrightarrow (E_2)$: $y'=1y$

La solution générale de l'équation différentielle (E_2): est l'ensemble des fonctions : $x\to y(x)=\lambda e^{x}$ où λ est un réel.

Exercice3 :Résoudre l'équations différentielle suivante :

$(E): 2y'-4y-3=0$

Solution : $(E): 2y'-4y-3=0 \Leftrightarrow 2y'=4y+3$

$\Leftrightarrow y'=\frac{4y+3}{2} \Leftrightarrow y'=2y+\frac{3}{2}$

on a donc ; $a=2$ et $b=\frac{3}{2}$

La solution générale de l'équation différentielle (E) : est l'ensemble des fonctions :

$x\mapsto \lambda e^{2x}-\frac{3}{4}$ Où λ est un réel.

Exercice4 :soit l'équations différentielle suivante :

$(E): \frac{1}{2}y'+3y-1=0$

1)Résoudre l'équation différentielle (E)

2) Déterminer la solution f de (E)

Telle que $f'(0)=-2$.

Solution :1) $(E): \frac{1}{2}y'+3y-1=0 \Leftrightarrow y'=-6y+2$

Donc : $a=-6$ et $b=2$

La solution générale de l'équation différentielle (E): est l'ensemble des fonctions :

$x\mapsto \lambda e^{-6x}+3$ Où λ est un réel.

2) $f(x)=\lambda e^{-6x}+3$ On va calculer : $f'(x)$

$f'(x)=\left(\lambda e^{-6x}+3\right)'=-6\lambda e^{-6x}$

$f'(0)=-2 \Leftrightarrow -6\lambda e^{0}=-2 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{3}$

Donc : $f(x)=\frac{1}{3}e^{-6x}+3$ c'est la solution de (E) qui vérifie la condition initiale

Exercice5 : Considérons les équations différentielles

(E_0): $y'-y=0$ et (E) : $y'-y=2x^2+x$

1- Résoudre l'équation différentielle (E_0)

2- a) Soit P une fonction polynôme, quel sera le degré de P afin que P soit une solution de (E)

b) Déterminer le polynôme P pour que P soit une solution de (E)

c) Montrer que : y est solution de (E) si et seulement si $(y-P)$ est solution de (E)

d) En déduire la solution générale de

L'équation (E)

3) déterminer la solution φ de (E) telle que φ (0) = 2

Exercice6 : 1) Résoudre l'équations différentielle suivante : $(E): y''-7y'+12y=0$

2) Déterminer la solution f de (E)

Telle que $f\ (0)=0$ et $f\ '(0)=1$

Solution :1) l'équation Caractéristique de $(E\ )$ est :

(E_1): $r^2-7r+12=0$

On a : $\Delta=1$ donc l'équation (E_1) a deux racines : r_1 et r_2 réelles et distinctes : $r_1=3$ et $r_2=4$

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :

$y(x)=\alpha e^{4x}+\beta e^{3x}$ où α et β réels

2) $f(x)=\alpha e^{4x}+\beta e^{3x}$

$$f'(x)=\left(\alpha e^{4x}+\beta e^{3x}\right)'=4\alpha e^{4x}+3\beta e^{3x}$$

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ 4\alpha+3\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-\alpha \\ 4\alpha-3\alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-1 \\ \alpha=1 \end{cases}$$

Donc : $f(x)=e^{4x}-e^{3x}$ c'est la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales

Exercice7 : 1) Résoudre l'équations différentielle suivante : $(E): y''-2y'+y=0$

2) Déterminer la solution f de (E)

Telle que $f\ (0)=0$ et $f\ '(0)=1$

Solution :1) l'équation Caractéristique de $(E\ )$ est :

(E_1): $r^2-2r+1=0$

On a : $\Delta=0$ donc l'équation (E_1) admet une racine double $r_0=\frac{-b}{2a}=1$

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :

$y(x)=(\alpha x+\beta)e^x$ où α et β réels

2) $f(x)=(\alpha x+\beta)e^x$

$$f'(x)=\left((\alpha x+\beta)e^x\right)'=\left((\alpha x+\beta)\right)'e^x+(\alpha x+\beta)\left(e^x\right)'$$

$$f'(x)=(\alpha x+\alpha+\beta)e^x$$

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha+\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=1 \end{cases}$$

Donc : $f(x)=(1x+0)e^x$ donc : $f(x)=xe^x$

C'est la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales.

Exercice8 : 1) Résoudre l'équations différentielle suivante : $(E): y''-4y'+13y=0$

2) Déterminer la solution f de (E)

Telle que $f\ (0)=0$ et $f\ '(0)=1$

Solution :1) l'équation Caractéristique de $(E\ )$ est :

(E_1): $r^2-4r+13=0$ On a : $\Delta=-36=(6i)^2$

donc l'équation (E_1) a deux racines z_1 et z_2 complexes conjugués et on a: $z_1=\frac{4+i6}{2}$ et $r_2=\frac{4-i6}{2}$ donc

$z_1=2+3i=p+iq$

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :

$y(x)=e^{2x}(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)$ où α et β réels

2) $f(x)=e^{2x}(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)$

$$f'(x)=\left(e^{2x}(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)\right)'$$

$$=\left(e^{2x}\right)'(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)+e^{2x}(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)'$$

$$=2e^{2x}(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)+e^{2x}(-3\alpha\sin 3x+3\beta\cos 3x)$$

$$f'(x)=e^{2x}(2\alpha\cos 3x+2\beta\sin 3x-3\alpha\sin 3x+3\beta\cos 3x)$$

$$f'(x)=e^{2x}\left((2\alpha+3\beta)\cos 3x+(2\beta-3\alpha)\sin 3x\right)$$

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ 2\alpha+3\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc : $f(x)=e^{2x}\left(0\times\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x$

c'est la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales

Exercice9 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' = 7y - 5$ avec $y(0) = -6$

2) $y'' - 15y' + 56y = 0$ avec : $y'(0) = 9$; $y(0) = -3$

3) $y'' + 14y' + 49y = 0$ avec **:** $y'(0) = 6$; $y(0) = -3$

4) $y'' + y' + \dfrac{5}{2}y = 0$ avec **:** $y'(0) = 6$; $y(0) = -4$

Solutions : 1) $y' = 7y - 5$ Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :

$y(x) = \lambda e^{7x} + \dfrac{5}{7}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

On a **:** $y(0) = \lambda + \dfrac{5}{7} = -6$ donc **:** $\lambda = -\dfrac{47}{7}$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est : $\boxed{y(x) = -\dfrac{47}{7}e^{7x} + \dfrac{5}{7}}$

2) $y'' - 15y' + 56y = 0$ **avec :** $y'(0) = 9$; $y(0) = -3$

l'équation Caractéristique de l'équation est :

$r^2 - 15y + 56 = 0$ donc : $r_1 = 7$ **et** $r_2 = 8$

Donc : $y(x) = \alpha e^{7x} + \beta e^{8x}$ où α et β réels

Donc **:** $y'(x) = 7\alpha e^{7x} + 8e^{8x}$

$$\begin{cases} y(0) = \alpha + \beta \\ y'(0) = 7\alpha + 8\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0) = -3 \\ y'(0) = 9 \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ 7\alpha + 8\beta = 9 \end{cases}$ donc : $\beta = 30$; $\alpha = -33$ Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est :

$\boxed{y(x) = -33e^{7x} + 30e^{8x}}$

3) $y'' + 14y' + 49y = 0$ **avec :** $y'(0) = 6$; $y(0) = -3$

l'équation Caractéristique de l'équation est :

$r^2 + 14y + 49 = 0$ donc : $r = -7$

Les solutions : $\left((\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2\right)$ $y(x) = (\alpha x + \beta)e^{-7x}$

$y'(x) = \alpha e^{-7x} - 7(\alpha x + \beta)e^{-7x}$

$$\begin{cases} y(0) = -3 \\ y'(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0) = \beta \\ y'(0) = \alpha - 7\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha - 7\beta = 6 \end{cases}$$

Donc : $\alpha = -15$; $\beta = -3$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est $\boxed{y(x) = (-15x - 3)e^{-7x}}$

4) $y'' + y' + \dfrac{5}{2}y = 0$ **avec :** $y'(0) = 6$; $y(0) = -4$

l'équation Caractéristique de l'équation est :

$r^2 + y + \dfrac{5}{2} = 0$ on trouve **:** $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$ et $\bar{z} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$

Donc **:** $\left((\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2\right)$ $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{3}{2}x\right) + \beta\sin\left(\dfrac{3}{2}x\right)\right)$

où α et β réels

$$y'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(\alpha\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$$

$$+\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\alpha\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$$

$$\begin{cases} y(0) = -4 \\ y'(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta = 6 \end{cases}$$

Donc : $\alpha = -4$; $\beta = \dfrac{8}{3}$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est

$$\boxed{y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)}$$

Exercice10 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $2y'' + y' - 3y = 0$ 2) $y'' + 2y' + 2y = 0$

3) $y'' + 4y' + 4y = 0$ 4) $y'' + 2y = 0$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement

Aux calculs et exercices Que l'on devient

Un mathématicien