Corrigé de l'exercice 1 :

Soit n un élément de $\mathbb{N}$

On a : $u_n = 1 - \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$

Et puisque : $1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Alors : $u_n = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

On a : $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Et par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

Corrigé de l'exercice 2 :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2+3}{2n-7} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2\left(5+\frac{3}{n^2}\right)}{n\left(2-\frac{7}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} n \times \dfrac{5+\frac{3}{n^2}}{2-\frac{7}{n}} = +\infty$

   Car : $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{n} = 0$

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}$

   On a : $\dfrac{7n-1}{5n+3} \le u_n \le \dfrac{7n+1}{5n+3}$ (car $-1 \le (-1)^n \le 1$)

   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n-1}{5n+3} = \dfrac{7}{5}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n+1}{5n+3} = \dfrac{7}{5}$

   Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{7}{5}$

3. On a , pour tout n de $\mathbb{N}$: $-1 \le \cos(n) \le 1$ et $n^2+3 > 0$

   Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\dfrac{-1}{n^2+3} \le u_n \le \dfrac{1}{n^2+3}$

   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n^2+3} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+3} = 0$

Et par suite : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

4. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

Pour tout k de $\mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$1 \leq k \leq n \quad \Leftrightarrow \quad 1+n^2 \leq k+n^2 \leq n+n^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+n^2} \leq \sqrt{k+n^2} \leq \sqrt{n+n^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n+n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$$

Donc : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+n^2}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$

Donc : $\frac{n}{\sqrt{n+n^2}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

Puisque : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n+n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n+n^2}} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^2}{1+n^2}} = 1$

Alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

5. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n+5^n}{3^n+4\times 5^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n\left(\frac{3^n}{5^n}+1\right)}{5^n\left(\frac{3^n}{5^n}+4\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+4} = \frac{1}{4}$

Car : (puisque $-1 < \frac{3}{5} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$)

Corrigé de l'exercice 3 :

1. Montrons par récurrence que : $u_n \geq 9$, pour tout n de $\mathbb{N}$

- ▷ Pour $n = 0$:
  On a $u_0 = 10$
  Donc $u_0 \geq 9$
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$
  - Supposons que : $u_n \geq 9$
  - Montrons que : $u_{n+1} \geq 9$

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-9 &= \frac{17}{19}u_n+\frac{18}{19}-9 \\ &= \frac{17}{19}u_n-\frac{153}{19} \\ &= \frac{17}{19}(u_n-9) \end{aligned}$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n \geq 9$

Donc $u_n - 9 \geq 0$

Donc $\frac{17}{19}(u_n-9) \geq 0$

Donc $u_{n+1} \geq 9$

Et par suite $u_{n+1}-9 \geq 0$

▷ On conclut que : $u_n \geq 9$, pour tout n de $\mathbb{N}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{17}{19}u_n+\frac{18}{19}-u_n \\ &= \frac{-2}{19}u_n-\frac{18}{19} \\ &= \frac{-2}{19}(u_n-9) \end{aligned}$$

Puisque $u_n-9 \geq 0$ alors $\frac{-2}{19}(u_n-9) \leq 0$

Donc $u_{n+1}-u_n \leq 0$, pour tout n de $\mathbb{N}$

Et par suite (u_n) est décroissante .

- Puisque (u_n) est décroissante et minorée alors (u_n) est convergente .

3.

a- Soit $n \in \mathbb{N}$

On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-9 \\ &= \frac{17}{19}(u_n-9) \\ &= \frac{17}{19}v_n \end{aligned}$$

Donc : $v_{n+1}=\frac{17}{19}v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Et par suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{17}{19}$ et de premier terme $v_0=u_0-9=10-9=1$

b-

On a $v_n=v_0\left(\frac{17}{19}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Donc $v_n=\left(\frac{17}{19}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

c-

- ▷ On a : $v_n=u_n-9$ pour tout n de $\mathbb{N}$

  Donc : pour tout n de $\mathbb{N}$

  Et par suite : $u_n=\left(\frac{17}{19}\right)^n+9$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- ▷ Puisque $-1<\frac{17}{19}<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{17}{19}\right)^n=0$

  Et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=9$

Corrigé de l'exercice 4 :

1.

- ▷ Pour $n=0$:

  On a $u_0=3$

  Donc $u_0>2$

- ▷ Soit $n\in\mathbb{N}$
  - Supposons que : $u_n>2$
  - Montrons que : $u_{n+1}>2$

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-2 &= \frac{12-8u_n}{4-3u_n}-2 \\ &= \frac{12-8u_n-8+6u_n}{4-3u_n} \\ &= \frac{4-2u_n}{4-3u_n} \\ &= \frac{-2(u_n-2)}{4-3u_n} \end{aligned}$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n > 2$

Donc $u_n - 2 > 0$ et $4-3u_n < -2 < 0$

Donc $\frac{-2(u_n-2)}{4-3u_n} > 0$

Donc $u_{n+1} - 2 > 0$

Et par suite $u_{n+1} > 2$

▷ On conclut que : $u_n > 2$, pour tout n de $\mathbb{N}$

2. a- Soit $n \in \mathbb{N}$:

on a :

▷

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-2} \\ &= \frac{\frac{12-8u_n}{4-3u_n}}{\frac{12-8u_n-8+6u_n}{4-3u_n}} \\ &= \frac{12-8u_n}{4-2u_n} \\ &= \frac{-2(4u_n-6)}{-2(u_n-2)} \\ &= \frac{4u_n-6}{u_n-2} \end{aligned}$$

$\triangleright$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{4u_n - 6}{u_n - 2} - \frac{u_n}{u_n - 2} \\ &= \frac{3u_n - 6}{u_n - 2} \\ &= \frac{3(u_n - 2)}{u_n - 2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Donc , $v_{n+1} - v_n = 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Et par suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0}{u_0 - 2} = \frac{3}{3-2} = 3$

b- On a : $v_n = v_0 + nr$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Donc : $v_n = 3 + 3n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

c-

$\triangleright$ Soit $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n}{u_n - 2} &\Leftrightarrow u_n v_n - 2v_n = u_n \\ &\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = 2v_n \\ &\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = 2v_n \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n}{v_n - 1} \end{aligned}$$

Donc $u_n = \frac{2(3+3n)}{(3+3n)-1}$

Et par suite : $u_n = \frac{6+6n}{2+3n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

$\triangleright$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6+6n}{2+3n} = 2$

Corrigé de l'exercice 5 :

1. Montrons par récurrence que : $u_n \geq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

▷ Pour $n = 0$:
On a $u_0 = 2$
Donc $u_0 \geq 1$

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$
- Supposons que : $u_n \geq 1$
- Montrons que : $u_{n+1} \geq 1$

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{7u_n + 2}{2u_n + 7} - 1 \\ &= \frac{7u_n + 2 - 2u_n - 7}{2u_n + 7} \\ &= \frac{5u_n - 5}{2u_n + 7} \\ &= \frac{5(u_n - 1)}{2u_n + 7} \end{aligned}$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n \geq 1$
Donc $u_n - 1 \geq 0$ et $2u_n + 7 \geq 9 > 0$
Donc $\frac{5(u_n - 1)}{2u_n + 7} \geq 0$
Donc $u_{n+1} - 1 \geq 0$
Et par suite $u_{n+1} \geq 1$

▷ On conclut que : $u_n \geq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

2.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{7u_n + 2}{2u_n + 7} - u_n \\ &= \frac{7u_n + 2 - 2u_n^2 - 7u_n}{2u_n + 7} \\ &= \frac{2(1 - u_n^2)}{2u_n + 7} \end{aligned}$$

Puisque $u_n \geq 1$ alors $1-u_n^2 \leq 0$ et $2u_n+7>0$

Donc $\dfrac{2\left(1-u_n^2\right)}{2u_n+7} \leq 0$

Et par suite $u_{n+1}-u_n \leq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$

D'où (u_n) est décroissante

- ▷ Puisque (u_n) est décroissante et minorée alors (u_n) est convergente

3.

a- Soit $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} \\
&= \frac{\dfrac{7u_n+2}{2u_n+7}-1}{\dfrac{7u_n+2}{2u_n+7}+1} \\
&= \frac{7u_n+2-2u_n-7}{7u_n+2+2u_n+7} \\
&= \frac{5u_n-5}{9u_n+9} \\
&= \frac{5}{9} \times \frac{u_n-1}{u_n+1} \\
&= \frac{5}{9} v_n
\end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} = \dfrac{5}{9} v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Et par suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{5}{9}$ et du premier terme

$v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$

b- On a $v_n = v_0 \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Donc $v_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{9}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

c-

- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$

  On a :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Leftrightarrow u_n v_n + v_n = u_n - 1$$
$$\Leftrightarrow u_n - u_n v_n = v_n + 1$$
$$\Leftrightarrow u_n(1 - v_n) = v_n + 1$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n + 1}{1 - v_n}$$

Donc $u_n = \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n + 1}{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

▷ Puisque $-1 < \frac{5}{9} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n + 1}{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n} = 1$

Corrigé de l'exercice 6 :

1. On a f est dérivable sur $I = [0,1]$

   Soit $x \in I = [0,1]$:

   On a : $f'(x) = \left(\dfrac{4x+3}{3x+4}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{(3x+4)^2}$

   Donc : $f'(x) = \dfrac{7}{(3x+4)^2}$ pour tout x de $I = [0,1]$

   Puisque : $f'(x) > 0$ pour tout x de $I = [0,1]$ alors f est strictement croissante sur $I = [0,1]$

2. On a : f est continue et strictement croissante sur $I = [0,1]$

   Donc $f(I) = f([0,1]) = [f(0), f(1)] = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$

   Et par suite $f(I) \subset I$

3. Soit $x \in I = [0,1]$:

   On a :

$$\begin{aligned} f(x)-x &= \frac{4x+3}{3x+4}-x \\ &= \frac{4x+3-3x^2-4x}{3x+4} \\ &= \frac{3(1-x^2)}{3x+4} \end{aligned}$$

On a : $x \in I = [0,1]$ donc $1-x^2 \geq 0$ et $3x+4>0$

Donc $\dfrac{3(1-x^2)}{3x+4} \geq 0$

Donc $f(x)-x \geq 0$ pour tout x de $I=[0,1]$

Et par suite (C_f) est au-dessus de $(\Delta): y=x$ sur $I=[0,1]$

4.

a- Montrons que : $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

- ▷ Pour $n=0$:

  On a : $u_0 = \dfrac{1}{2}$

  Donc : $0 \leq u_0 \leq 1$

- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$
  - Supposons que $0 \leq u_n \leq 1$
  - Montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

    D'après l'hypothèse de récurrence , on a $u_n \in I$

    Donc $f(u_n) \in f(I)$

    Donc $u_{n+1} \in f(I)$

    Et puisque $f(I) \subset I$, alors $u_{n+1} \in I$

    D'où $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

- ▷ On conclut que $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

b- Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $f(x)-x \geq 0$ pour tout x de $I=[0,1]$

Et comme $u_n \in I$, alors $f(u_n)-u_n \geq 0$

Donc $u_{n+1}-u_n \geq 0$, pour tout n de $\mathbb{N}$

D'où (u_n) est croissante

c- On a : $u_0 = \dfrac{1}{2} \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- ▷ f est continue sur $I=[0,1]$
- ▷ $f(I)\subset I$
- ▷ Puisque (u_n) est croissante et majorée alors elle est convergente

  Donc la limite de (u_n) est solution de l'équation $f(x)=x$

  Et on a : $f(x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x=-1 \quad ou \quad x=1$

  Puisque $0\leq u_n \leq 1$, alors $0\leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 1$

  D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$