

# Devoir Surveillé 1

Niveau : 2BacSP

Prof : Abdessamad Rouchad

## Exercice I :

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x}(2 - e^{2x}) - x$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (Unité : 2 cm )

- 1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- 2) a) Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = -x$  est une asymptote à la courbe  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$ .  
b) Résoudre l'équation  $2 - e^{2x} = 0$ , puis montrer que la courbe  $(C)$  est au-dessus de  $(\Delta)$  sur l'intervalle  $] -\infty, \frac{\ln 2}{2}]$  et en dessous de  $(\Delta)$  sur l'intervalle  $[\frac{\ln 2}{2}, +\infty[$ .
- 3) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  puis interpréter géométriquement le résultat.
- 4) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -(2e^{2x} - 1)^2$   
b) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- 5) Montrer que  $A(-\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{4})$  est un point d'inflexion de  $(C)$ .
- 6) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  telle que  $0 < \alpha < \frac{\ln 2}{2}$
- 7) Construire  $(\Delta)$  et  $(C)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ci-dessus (On prendra  $-\frac{\ln 2}{2} \approx -0,35$  et  $\frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2} \approx 1,1$ )
- 8) a) Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .  
b) Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe représentative de la fonction  $f^{-1}$  (Remarquer que la droite  $(\Delta)$  est perpendiculaire à la première bissectrice  $y = x$ )  
c) Calculer  $(f^{-1})'(1)$  (Remarquer que  $f^{-1}(1) = 0$ )

## Exercice II :

- 1) Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère l'équation :  $(E) : z^2 - 6(1 - \sqrt{3})z + 72 = 0$ 
  - a) Vérifier que le discriminant de l'équation  $(E)$  est  $\Delta = -36(\sqrt{3} + 1)^2$
  - b) En déduire les solutions de l'équation  $(E)$ .
- 2) Soient les nombres complexes  $a = 3(1 - \sqrt{3}) - i3(\sqrt{3} + 1)$ ,  $b = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$  et  $c = -\sqrt{3} - 3i$ 
  - a) Vérifier que  $b\bar{c} = a$ , puis en déduire que  $ac = 12b$
  - b) Écrire les nombres complexes  $b$  et  $c$  sous forme exponentielle.
  - c) En déduire que  $a = 6\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$
- 3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $b, c$  et  $d$  telle que  $D$  est l'image de  $B$  par l'homothétie  $h$  de centre  $O$  et du rapport  $\sqrt{2}$ . Soit  $z$  l'affixe d'un point  $M$  du plan et  $z'$  l'affixe de  $M'$  image de  $M$  par la rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{-7\pi}{12}$ 
  - a) Déterminer  $d$  l'affixe de  $D$
  - b) Vérifier que  $z' = \frac{\sqrt{2}}{12}az$
  - c) Déterminer l'image du point  $C$  par la rotation  $R$
  - d) Déterminer la nature du triangle  $ODC$ .