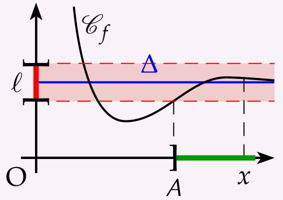
Comportement d'une fonction

Il s'agit déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition d'une fonction.

Comportement d'une fonction en l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

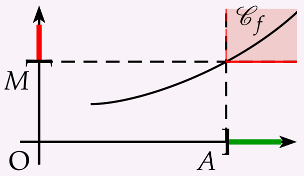
Tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand i.e. pour $x \in]A\,;+\infty[$.



On a une asymptote horizontale $y = \ell$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Tout intervalle $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand i.e. pour $x \in]A\,;+\infty[$.



Opérations sur les limites

On peut calculer les limites par somme, produit et quotient sauf dans les 4 cas suivants.

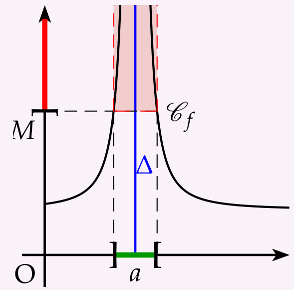
- $+\infty - \infty$ **:** On essaiera de mettre la fonction sous la forme d'un produit.
- $0 \times \infty$ **:** On essaiera de mettre la fonction sous la forme d'une somme.
- $\dfrac{0}{0}$ **:** On simplifiera la fonction dans le cas d'une fonction rationnelle.
- $\dfrac{\infty}{\infty}$ **:** On mettra en facteur le terme prépondérant du numérateur et du dénominateur.

Comportement d'une fonction en un point où la fonction n'est pas définie

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

tout intervalle $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a i.e $|x-a| < \varepsilon$.

On a une asymptote verticale $x = a$



Remarque : Lorsque la limite en a n'existe pas mais que l'on peut définir une limite de chaque côté de a, on parle de limite à droite et de limite à gauche.

Limites en l'infini des fonctions élémentaires

$f(x)$	x^n	$\dfrac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$+\infty$ n pair $-\infty$ n impair	0	non défini	non défini

Limites en zéro des fonctions élémentaires

$f(x)$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$	$+\infty$ n pair $-\infty$ n impair	non défini

Théorème de comparaison

f, g, et h sont trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a (réel, $+\infty$ ou $-\infty$)

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \in I,\ \ f(x) \geqslant g(x)\\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \in I,\ \ f(x) \leqslant h(x)\\ \lim\limits_{x \to a} h(x) = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Limites et calculatrice

La notion de limite a mis du temps pour avoir un statut rigoureux en mathématique (deux siècles). C'est pour cela que sa définition n'est pas très « instinctive ».

Derrière la notion de limite se cache des nombres que l'on qualifiait avant « d'infiniment petit » ou « d'infiniment grand ». Une calculatrice ne connaît pas de tels nombres. On peut mettre en défaut une calculatrice sur un calcul de limite lorsque sa capacité d'appréhender un nombre très petit ou très grand est dépassée.

Théorème des gendarmes

f, g, et h sont trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a (réel, $+\infty$ ou $-\infty$)

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \in I,\ \ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)\\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$$

Quelques calculs de limites

- $f_1(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$ on a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x+3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par somme} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty \end{array}$$

- $f_2(x) = x^2 + x = x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ en $-\infty$ on factorise par le terme prépondérant

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par produit} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = +\infty \end{array}$$

- $f_3(x) = \dfrac{2x-1}{x+2} \overset{\div x}{=} \dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}$ en $+\infty$ on divise par le terme prépondérant

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2-\dfrac{1}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2}{x} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = 2 \end{array}$$

La courbe $\mathscr{C}_{f_3}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$.

- $f_4(x) = \dfrac{x^2-4}{1-x}$ en 1 on étudie la limite de chaque côte de la valeur interdite.

On fait un tableau de signes pour $(1-x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1} x^2-4 = -3 \\ \lim\limits_{x\to1^+} 1-x = 0^- \\ \lim\limits_{x\to1^-} 1-x = 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to1^+} f_4(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to1^-} f_4(x) = -\infty \end{array}$$

La courbe $\mathscr{C}_{f_4}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Étude d'une fonction rationnelle

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$

a) Déterminer la limite de la fonction f en -1. Interprétation géométrique.
b) Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
c) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
d) Étudier le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation.
e) Que se passe t-il pour la courbe au point $x = 0$?
f) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point $x = 2$.

---

a) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1} x^3 = -1 \\ \lim\limits_{x\to-1^+} x+1 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to-1^-} x+1 = 0^- \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient, on a} \\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty \end{array}$$ asymptote verticale d'équation $x = 1$.

b) En l'infini : $f(x) \overset{\div x}{=} \dfrac{x^2}{1+\dfrac{1}{x}}$ on a $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient, on a} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

c) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x+1) - x^3}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2(3x+3-x)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$

d) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0$ ou $2x+3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = -\dfrac{3}{2}$

Le signe de $f'(x)$ est du signe de $2x+3$ car $\forall \in D_f, \ x^2 > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert \ -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

e) Au point 0, la dérivée s'annule mais ne change pas de signe, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc un point d'inflexion en 0.

f) Équation de la tangente (T) au point d'abscisse 2.

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{28}{9}(x-2) + \frac{8}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{28}{9}x - \frac{32}{9}$$