CALCULS INTEGRALES

Exercices d'applications et de réflexions avec solutions

PROF : ATMANI NAJIB **2BAC sciences expérimentales (pc et svt.)**

CALCULS INTEGRALES : Exercices avec solutions

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_2^4 3x\,dx$ **2)** $J=\int_0^1 (2x+3)\,dx$

3) $K=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}\,dt$ 4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)\,d\theta$

Solution : 1) la fonction $x\mapsto 3x$ est continue sur $[2;4]$

Une primitive sur $[2;4]$ est : $x\mapsto \frac{3}{2}x^2$

Donc : $I=\int_2^4 3x\,dx=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_2^4=\frac{3}{2}\times 4^2-\frac{3}{2}\times 2^2=18$

2) $J=\int_0^1(2x+3)\,dx=\left[x^2+3x\right]_0^1=(1+3)-(0)=4$

3) $K=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}\,dt=\left[\ln t\right]_e^{e^2}=\ln e^2-\ln e=2-1=1$

4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)\,d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin 0=\frac{1}{2}$

Exercice2 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1=\int_0^2(2x-1)\,dx$ 2) $I_2=\int_{-1}^1\left(x^4-4x^3+2\right)dx$

3) $I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2}\,dx$ 4) $I_4=\int_0^{\ln 2}e^{2t}\,dt$

5) $I_5=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}te^{-t^2}\,dt$ 6) $I_6=\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

7) $I_7=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ 8) $I_8=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$

9) $I_9=\int_1^e\frac{\ln x}{x}\,dx$ 10) $I_{10}=\int_2^3\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}\,dx$

11) $I_{11}=\int_0^1\sqrt{2x+1}\,dx$ 12) $I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3 x\,dx$

13 $I_{13}=\int_1^2\frac{3}{(3x-4)^5}\,dx$ 14) $I_{14}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-\cos 3x)\,dx$

15) $I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ 16) $I_{16}=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x+1}\right)dx$

17) $I_{17}=\int_1^e\frac{\ln^3 x}{x}\,dx$ 18) $I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}\,dx$

19) $I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx$ 20) $I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^2\,dx$

21) $I_{21}=\int_1^e\frac{8x^9-4x+2}{x}\,dx$

Solution : 1) $I_1=\int_0^2(2x-1)\,dx=\left[2\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2=\left[x^2-x\right]_0^2$

$I_1=\left(2^2-2\right)-\left(0^2-0\right)=4-2=2$

$I_2=\int_{-1}^1\left(x^4-4x^3+2\right)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{4}x^4+2x\right]_{-1}^1=\left[\frac{1}{5}x^5-1x^4+2x\right]_{-1}^1$

$I_2=\left[\frac{1}{5}x^5-1x^4+2x\right]_{-1}^1=\left(\frac{1}{5}1^5-1^4+2\right)-\left(\frac{1}{5}(-1)^5-(-1)^4-2\right)$

$I_2=\left(\frac{1}{5}-1+2\right)-\left(-\frac{1}{5}-1-2\right)=\frac{1}{5}-1+2+\frac{1}{5}+1+2=\frac{2}{5}+4=\frac{22}{5}$

3) $I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

$I_4=\int_0^{\ln 2}e^{2t}\,dt=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}(2t)'e^{2t}\,dt=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-\frac{1}{2}e^{2\times 0}$

$I_4=\frac{1}{2}e^{\ln 2^2}-\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}4-\frac{1}{2}e^0=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

5) $I_5=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}te^{-t^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}-\frac{1}{2}\left(-t^2\right)'e^{-t^2}\,dt=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}$

$I_5=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}=-\frac{1}{2}e^{-\left(\sqrt{\ln 2}\right)^2}+\frac{1}{2}e^{-0^2}=-\frac{1}{2}e^{-\left(\sqrt{\ln 2}\right)^2}+\frac{1}{2}$

$$I_5 = -\frac{1}{2}e^{-\ln 2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{e^{\ln 2}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

6) $I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_1^e \frac{1}{x}\times\ln^2 x dx = \int_1^e \ln' x\times\ln^2 x dx$

$$I_6 = \left[\frac{1}{2+1}\ln^{2+1} x\right]_1^e = \frac{1}{3}\ln^3 e - \frac{1}{3}\ln^3 1 = \frac{1}{3}$$

7) $I_7 = \int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx = \int_0^{\ln 2}\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx = \left[\ln\left|e^x+1\right|\right]_0^{\ln 2}$

$$I_7 = \ln\left|e^{\ln 2}+1\right| - \ln\left|e^0+1\right| = \ln|3| - \ln|2| = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{e^x-e^{-x}}dx = \left[\ln\left|e^x-e^{-x}\right|\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I_8 = \ln\left|e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}\right| - \ln\left|e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}\right| = \ln\left|3-\frac{1}{e^{\ln 3}}\right| - \ln\left|e^{\ln 2}-\frac{1}{e^{\ln 2}}\right|$$

$$I_8 = \ln\left|3-\frac{1}{3}\right| - \ln\left|2-\frac{1}{2}\right| = \ln\left(\frac{8}{3}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{2}}\right) = \ln\left(\frac{16}{9}\right)$$

9) $I_9 = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx = \int_1^e (\ln x)'(\ln x)^1 dx = \left[\frac{1}{1+1}(\ln x)^{1+1}\right]_1^e$

$$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx = \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx = 2\int_2^3\frac{\left(x^2+3x-4\right)'}{2\sqrt{x^2+3x-4}}dx = 2\left[\sqrt{x^2+3x-4}\right]_2^3$$

$$I_{10} = 2\left[\sqrt{x^2+3x-4}\right]_2^3 = 2\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)$$

$$I_{11} = \int_0^1\sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1(2x+1)'(2x+1)^{\frac{1}{2}}dx = 2\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1$$

$$I_{11} = 2\left[\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}(3)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}(1)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\left(\left(\sqrt{(3)}\right)^3-1\right) = \frac{4}{3}\left(3\sqrt{(3)}-1\right)$$

12) $I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'\sin^3 x dx = \left[\frac{1}{4}\sin x^{3+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$I_{12} = \frac{1}{4}\sin^4\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin^4 0 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$I_{13} = \int_1^2\frac{3}{(3x-4)^5}dx = 3\int_1^2(3x-4)^{-5}dx = \int_1^2(3x-4)'(3x-4)^{-5}dx$$

$$I_{13} = \left[\frac{1}{-5+1}(3x-4)^{-5+1}\right]_1^2 = \left[\frac{1}{-4}(3x-4)^{-4}\right]_1^2 = \frac{1}{-4}(2)^{-4} - \frac{1}{-4}(-1)^{-4}$$

$$I_{13} = \frac{1}{-4}\times\frac{1}{16} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{64} + \frac{16}{64} = \frac{15}{64}$$

14) $I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-\cos 3x)dx = \left[2x - \frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$$I_{14} = \left(2\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\sin\pi\right) - 0 = \frac{2\pi}{3}$$

15) $I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx$

(on a : $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$: linearization) Donc:

$$I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)dx$$

$$I_{15} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_{15} = \frac{\pi+2}{8}$$

16) $I_{16} = \int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1}\right)dx = \int_0^1\left(\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{(2x+1)'}{2x+1}\right)dx$

$$= \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln|3| + 1 - \frac{1}{2}\ln|1| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 3$$

17) $I_{17} = \int_1^e\frac{\ln^3 x}{x}dx = \int_1^e\frac{1}{x}\times\ln^3 x dx = \int_1^e\ln' x\times\ln^3 x dx$

$$I_{17} = \left[\frac{1}{3+1}\ln^{3+1} x\right]_1^e = \frac{1}{4}\ln^4 e - \frac{1}{4}\ln^4 1 = \frac{1}{4}$$

$$I_{18} = \int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx = \int_0^1\frac{1}{2}\left((x-1)^2\right)'e^{(x-1)^2}dt = \left[\frac{1}{2}e^{(x-1)^2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{2}e^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}(1-e)$$

19) $I_{19} = \int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx = \int_1^2\frac{\frac{1}{x}}{(1+\ln x)}dx$

$$I_{19}=\int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^2 \frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)}dx=\left[\ln|1+\ln x|\right]_1^2$$

$$I_{19}=\ln|1+\ln 2|-\ln|1+\ln 1|=\ln|1+\ln 2|=\ln(1+\ln 2)$$

20) $I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^2\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1+(\tan x)^2-1dx$

$$I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\left(1+(\tan x)^2\right)-1\right)dx=\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_{20}=\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$$

21) $I_{21}=\int_1^e \frac{8x^9-4x+2}{x}dx=\int_1^e\left(8x^8-4+\frac{2}{x}\right)dx$

$$=\left[\frac{8}{9}x^9-4x+2\ln x\right]_1^e=\frac{8}{9}e^9-4e+\frac{46}{9}$$

Exercice3: Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_0^3|x-1|dx$ 2) $J=\int_{-2}^0|x(x+1)|dx$

Solution :1)on a $x\in[0,3]$

$x-1=0\Leftrightarrow x=1$ on va étudier le signe de : $x-1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

la Relation de Chasles donne :

$$I=\int_0^3|x-1|dx=\int_0^1|x-1|dx+\int_1^3|x-1|dx$$

$$I=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^3(x-1)dx$$

$$I=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{5}{2}$$

2) $J=\int_{-2}^0|x(x+1)|dx$

$x(x+1)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-1$

on va étudier le signe de : $x(x+1)$

a)si $x\in[-2;-1]$ alors : $x(x+1)\geq 0$

donc : $|x(x+1)|=x(x+1)$

b)si $x\in[-1;0]$ alors : $x(x+1)\leq 0$

$|x(x+1)|=-x(x+1)$

La Relation de Chasles donne :

$$J=\int_{-2}^0|x(x+1)|dx=\int_{-2}^{-1}|x(x+1)|dx+\int_{-1}^0|x(x+1)|dx$$

$$J=\int_{-2}^{-1}(x^2+x)dx+\int_{-1}^0(-x^2-x)dx$$

$$J=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0$$

$$J=\left(\frac{1}{6}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)+\left(0-\left(-\frac{1}{6}\right)\right)=1$$

Exercice4: on pose $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x dx$

1)Calculer $I+J$ et $I-J$

2)en déduire I et J

Solution :

1) $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=[x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx=\frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{1}{2}$$

2) $\begin{cases} I+J=\frac{\pi}{4} \\ I-J=\frac{1}{2}\end{cases}$ par sommation on trouve:

$2I=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ donc : $I=\frac{\pi+2}{8}$ et on replace dans

dans la 1ére équation et on trouve: $\frac{\pi+2}{8}+J=\frac{\pi}{4}$

Donc: $J=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi+2}{8}=\frac{2\pi-\pi-2}{8}=\frac{\pi-2}{8}$

Exercice5 :

on pose : $I=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ et $J=\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx$

1)Calculer $I+J$ et $I-3J$

2)en déduire I et J

Solution :1)

$$I+J=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx+\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx=\int_0^{\ln 16}\left(\frac{e^x+3}{e^x+4}+\frac{1}{e^x+4}\right)dx$$

$$I+J=\int_0^{\ln 16}\left(\frac{e^x+4}{e^x+4}\right)dx=\left[x\right]_0^{\ln 16}=\ln 16-0=4\ln 2$$

$$I-3J=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx-3\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx=\int_0^{\ln 16}\left(\frac{e^x+3}{e^x+4}-\frac{3}{e^x+4}\right)dx$$

$$I-3J=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x}{e^x+4}dx=\int_0^{\ln 16}\frac{\left(e^x+4\right)'}{e^x+4}dx=\left[\ln\left|e^x+4\right|\right]_0^{\ln 16}$$

$$I-3J=\ln\left|e^{\ln 16}+4\right|-\ln\left|e^0+4\right|=\ln|20|-\ln|5|=\ln 20-\ln 5$$

$$I-3J=\ln\frac{20}{5}=\ln 4=2\ln 2$$

2) $\begin{cases} I+J=4\ln 2 \\ I-3J=2\ln 2\end{cases}$ par soustraction on trouve:

$4J=2\ln 2$ donc: $J=\frac{\ln 2}{2}$

Et on replace dans dans la 1ére équation et on trouve :

$\frac{\ln 2}{2}+I=4\ln 2$ donc: $I=4\ln 2-\frac{\ln 2}{2}=\frac{7\ln 2}{2}$

Exercice6: Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_1^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$ 2) $I=\int_0^{\ln 3}\left|2-e^x\right|dx$

3) $I=\int_0^2\left|x^2-x-2\right|dx$

Solution : 1) $x-2=0\Leftrightarrow x=2$

étude du signe de: $x-2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

La Relation de Chasles donne :

$$I=\int_1^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx=\int_0^2\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\int_2^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$=\int_0^2\frac{-(x-2)}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\int_2^3\frac{x-2}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{-\left(x^2-4x\right)'}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{\left(x^2-4x\right)'}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-4x}\right]_1^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-4x}\right]_2^3$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-4}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{6}-\frac{2}{8}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

2) $I=\int_0^{\ln 3}\left|2-e^x\right|dx$

$$2-e^x\geq 0\Leftrightarrow e^x\leq 2\Leftrightarrow x\leq\ln 2$$

$$I=\int_0^{\ln 2}\left|2-e^x\right|dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left|2-e^x\right|dx$$

$$I=\int_0^{\ln 2}\left(2-e^x\right)dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x-2dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[2x-e^x\right]_0^{\ln 2}+\left[e^x-2x\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I=\left((2\ln 2-2)+1\right)+\left((3-2\ln 3)-(2-2\ln 2)\right)=\ln\left(\frac{16}{9}\right)$$

Exercice7:on pose :

$A=\int_1^e\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)dt$ et $B=\int_1^e\left(1+\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$

Calculer $A+B$

Solution :

$$A+B=\int_1^e\left(\frac{1}{t}+\ln t+1+\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt=\int_1^e\left(\frac{1}{t}+\ln t+1-\ln(t)\right)dt$$

$$A+B=\int_1^e\left(\frac{1}{t}+1\right)dt=\left[\ln|t|+t\right]_1^e=\ln e+e-\ln|1|-1=e$$

Exercice8:on pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\times\cos 2x dx$ et

$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\times\cos 2x dx$

1)Calculer $I+J$ et $I-J$

2)en déduire I et J

Solution :

1) $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\times\cos 2x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\times\cos 2x dx$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\times 1dx=\frac{1}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I+J=\frac{1}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left[\sin\pi-\sin 0\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\times\cos 2x dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\times\cos 2x dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\times\cos 2x dx$$

$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2x dx$ on a : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ $\quad a=2x$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\pi\right)=\frac{\pi}{4}$$

2) $\begin{cases} I+J=0 \\ I-J=\frac{\pi}{4} \end{cases}$ par sommation on trouve: $2I=\frac{\pi}{4}$

Donc : $I=\frac{\pi}{8}$ et on replace dans dans la 1ére équation et on trouve : $\frac{\pi}{8}+J=0\Leftrightarrow J=-\frac{\pi}{8}$

Exercice9 :on pose : $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$ et

$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$

1)Calculer $K+L$ et $K-L$

2)en déduire K et L

Solution :1) $K+L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$

La linéarité de l'intégrale donne :

$$K+L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\right)dx$$

$$K+L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x+\sin x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

La linéarité de l'intégrale donne :

$$K-L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\right)dx$$

$$K-L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\left(\cos x+\sin x\right)'}{\cos x+\sin x}\right)dx$$

$$K-L=\left[\ln\left|\cos x+\sin x\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$$

2) $\begin{cases} K+L=\frac{\pi}{4} \\ K-L=\frac{1}{2}\ln 2 \end{cases}$ par sommation et soustraction

on trouve: $2K=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ et $2L=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

Donc : $K=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2$ et $L=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$

Exercice10 :1)verifier que :

$\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}\quad \frac{t^2}{1+t}=t-1+\frac{1}{1+t}$

2) Calculer l' intégrale suivante : $I=\int_0^1\frac{t^2}{1+t}dt$

Solution :1)

$$\frac{t^2}{1+t}=\frac{\left(t^2-1\right)+1}{1+t}=\frac{t^2-1}{1+t}+\frac{1}{1+t}=\frac{(t-1)(t+1)}{1+t}+\frac{1}{1+t}$$

Donc : $\frac{t^2}{1+t}=t-1+\frac{1}{1+t}\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

2) $I=\int_0^1\frac{t^2}{1+t}dt=\int_0^1\left(t-1+\frac{(1+t)'}{1+t}\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|\right]_0^1$

$$I=\frac{1}{2}-1+\ln|2|=-\frac{1}{2}+\ln 2$$

Exercice11 : 1)verifier que :

$\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}\quad \frac{4x-5}{x^2-1}=\frac{9}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}$

2) Calculer l' intégrale suivante : $I=\int_3^5\frac{4x-5}{x^2-1}dx$

Solution :1)

$$\frac{9}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}=\frac{18(x-1)-2(x+1)}{4(x+1)(x-1)}=\frac{18x-18-2x-2}{4(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{16x-20}{4(x+1)(x-1)}=\frac{4x-5}{(x+1)(x-1)}=\frac{4x-5}{x^2-1}$$

2) $I=\int_3^5\frac{4x-5}{x^2-1}dx=\int_3^5\left(\frac{9}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}\right)dx$

$$=\frac{9}{2}\int_3^5\frac{1}{(x+1)}dx-\frac{1}{2}\int_3^5\frac{1}{x-1}dx=\frac{9}{2}\int_3^5\frac{(x+1)'}{(x+1)}dx-\frac{1}{2}\int_3^5\frac{(x-1)'}{x-1}dx$$

$$=\frac{9}{2}\left[\ln|x+1|\right]_3^5-\frac{1}{2}\left[\ln|x-1|\right]_3^5=\frac{9}{2}(\ln 6-\ln 4)-\frac{1}{2}(\ln 4-\ln 2)$$

$$I=\frac{9}{2}\ln 6-\frac{9}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{9}{2}\ln 6-\frac{19}{2}\ln 2$$

Exercice12 :

Calculer l' intégrale suivante : $I=\int_0^1\frac{x-1}{x+1}dx$

Solution :

$$I=\int_0^1\frac{x-1}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x+1-2}{x+1}dx=\int_0^1\left(\frac{x+1}{x+1}-\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$I=\int_0^1\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx=\int_0^1 1dx-2\int_0^1\frac{(x+1)'}{x+1}dx=[x]_0^1-2\left[\ln|x+1|\right]_0^1$$

$$I=1-2\ln 2$$

Exercice13 : 1) determiner les réels a et b tels que : $\frac{x^3}{x^2+1}=ax+\frac{bx}{x^2+1}$

2)en déduire l' intégrale suivante : $I=\int_0^1\frac{x^3}{x^2+1}dx$

Exercice14 : Calculer l' intégrale suivante :

$$I=\int_0^1\frac{1}{x^2-4}dx$$

Solution : On remarque que :

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)$$

donc : $I=\int_0^1\frac{1}{x^2-4}dx=\int_0^1\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

et la linéarité de l'intégrale donne :

$$I=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{x+2}dx$$

$$I=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{x+2}dx$$

$$I=\frac{1}{4}\left[\ln|x-2|\right]_0^1-\frac{1}{4}\left[\ln|x+2|\right]_0^1$$

$$I=-\frac{1}{4}\ln 2-\frac{1}{4}(\ln 3-\ln 2)=-\frac{1}{4}\ln 3$$

Exercice15 :on pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx$

1)montrer que : $\cos^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ (linéarisation de $\cos^4 x$)

2)en déduire l' intégrale I

Solution :1)on a : $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ donc :

$$\cos^4 x=\left(\frac{e^{iX}+e^{-iX}}{2}\right)^4$$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(e^{ix}\right)^4+4\left(e^{ix}\right)^3\cdot\left(e^{-ix}\right)+6\left(e^{ix}\right)^2\cdot\left(e^{-ix}\right)^2+4\left(e^{ix}\right)^1\cdot\left(e^{-ix}\right)^3+\left(e^{-ix}\right)^4\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{i3x}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}+4e^{2ix}+4e^{2ix}+6\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+4\left(e^{2ix}+e^{2ix}\right)+6\right)$$

Or on sait que :

$2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$ t $2\cos nx=e^{inx}+e^{-inx}$

Donc : $\cos^4\theta=\frac{1}{16}\left((2\cos 4x)+4(2\cos 2x)+6\right)$

Donc: $\cos^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$

2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 4x+4\cos 2x+3)dx$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x+4\frac{1}{2}\sin 2x+3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 2\pi+4\frac{1}{2}\sin\pi+3\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{16}$$

Exercice16 : Montrer les inégalités suivantes

1) $\int_1^e\ln x dx\geq 0$ 2) $\frac{1}{e}\leq\int_0^1 e^{-x^2}dt\leq 1$

Solution :1)on a $\ln$ positive et continue sur le segment $[1;e]$ et $1\leq e$ donc : $\int_1^e\ln x dx\geq 0$

2) Montrons que : $\frac{1}{e}\leq\int_0^1 e^{-x^2}dt\leq 1$

Soit $t\in[0;1]$ donc donc $-1\leq -t^2\leq 0$ et puisque :

$x\mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ alors : $e^{-1}\leq e^{-x^2}\leq 1$

Et puisque : $t \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0;1]$ et

$0 \prec 1$ Alors : $\int_0^1 e^{-1}dt \le \int_0^1 e^{-t^2}dt \le \int_0^1 1dt$

Donc : $\frac{1}{e} \le \int_0^1 e^{-x^2}dt \le 1$

Exercice17 : Montrer que : $\frac{1}{6} \le I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx \le \frac{1}{3}$

Solution : on a $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$

$\Leftrightarrow 1 \le x+1 \le 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{x+1} \le 1$

Donc : $\frac{x^2}{2} \le \frac{x^2}{1+x} \le x^2$

Donc : $\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx \le \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx \le \int_0^1 x^2dx$

Donc : $\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 \le I \le \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$ Donc : $\frac{1}{6} \le I \le \frac{1}{3}$

Exercice18 : d'application Soit f : $x \to e^{-x^2}$

Définie sur R.
Pour tout réel $a \ge 1$, on s'intéresse à l'intégrale
$F(a) = \int_1^a f(x)dx$

1)Démontrer que pour tout réel $x \ge 1$:
$0 \le f(x) \le e^{-x}$.

2) En déduire que pour tout réel $a \ge 1$:
$0 \le F(a) \le e^{-1}$.

Solution: 1) Une exponentielle étant toujours positive : $0 \le f(x)$ pour tout réel x et donc en particulier pour tout $x \ge 1$. De plus, si $x \ge 1$ alors $x \le x^2$, c'est-à-dire $-x \ge -x^2$ et donc $e^{-x} \ge f(x)$ par croissance de la fonction exponentielle.
On en déduit donc que pour tout réel $x \ge 1$
$0 \le f(x) \le e^{-x}$

2) À partir de l'inégalité obtenue, on utilise la propriété précédente sur l'intervalle [1 ; a] et ainsi
$\int_1^a 0dx \le \int_1^a f(x)dx \le \int_1^a e^{-x}dx$

$0 \le F(a) \le \left[-e^{-x}\right]_1^a$ Donc $0 \le F(a) \le -e^{-a} + e^{-1} \le e^{-1}$

Donc : $0 \le F(a) \le e^{-1}$ ce qui démontre l'inégalité.

Exercice19 : soit la suite numérique (u_n) définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Montrer que (u_n) est croissante

2) Montrer que : $\frac{1}{2} \le u_n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solution : 1) $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}}dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$

$= \int_0^1 \left(\frac{1+x^n - 1 - x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \right)dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx$

On sait que : $0 \le x \le 1$ donc : $0 \le 1-x$

Et on a: $\frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \ge 0$ car $0 \le x$

Donc : $\frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \ge 0$

Donc: $\int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx \ge 0$

Donc: $u_{n+1} - u_n \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc: (u_n) est croissante

2) Montrons que : $\frac{1}{2} \le u_n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a : $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x^n \le 1$

$\Leftrightarrow 1 \le x^n + 1 \le 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{x^n+1} \le 1$

Donc: $\int_0^1 \frac{1}{2}dx \le \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx \le \int_0^1 1dx$

Donc: $\frac{1}{2}[x]_0^1 \le \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx \le [x]_0^1$

Donc : $\frac{1}{2} \le u_n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 20: soit la suite numérique (u_n)

définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1)Montrer que :

$\forall n\in\mathbb{N} \ \forall x\in[0;1]$: $\frac{e^{nx}}{1+e} \le \frac{e^{nx}}{1+e^x} \le \frac{e^{nx}}{2}$

2) En déduire: $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{e^n}\right)$

Exercice 21: on considére la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

Déterminer La valeur moyenne de f sur $[0;\ln 2]$

Solution : La valeur moyenne de f sur $[0;\ln 2]$

Est : $f(c)=\frac{1}{\ln 2-0}\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx=\frac{1}{\ln 2-0}\int_0^{\ln 2}\frac{\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}dx$

$=\frac{1}{\ln 2}\left[-\frac{1}{e^x+1}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3\ln 2}$

Exercice 22: Calculer les intégrales suivantes :

1) $B=\int_1^e\frac{(\ln x)^3}{x}dx$ 2) $C=\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}dx$

Solution : 1) $B=\int_1^e\frac{(\ln x)^3}{x}dx=\int_1^e(\ln x)'(\ln x)^3dx$

$=\left[\frac{(\ln x)^4}{4}\right]_1^e=\frac{(\ln e)^4}{4}-\frac{(\ln 1)^4}{4}=\frac{1}{4}$

2) $C=\int_0^{\sqrt{3}}2x\sqrt{x^2+1}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx$

$=\left[\frac{\left(x^2+1\right)^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}\right]_1^{\sqrt{3}}=\left[\frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}(2-1)=\frac{2}{3}$

Exercice 23: Calculer l' intégrale suivante :

1) $I=\int_0^{\pi}x\sin x dx$ 2) $J=\int_0^{\ln 2}xe^xdx$

3) $K=\int_1^e\ln x dx$

Solution : 1) $I=\int_0^{\pi}x\sin x dx$

On pose : $u'(x)=\sin x$ et $v(x)=x$

Donc $u(x)=-\cos x$ et $v'(x)=1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0;\pi]$ et u' et v' sont continue sur $[0;\pi]$

donc: $I=\left[-x\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos x dx=\left[-x\cos x\right]_0^{\pi}-\left[-\sin x\right]_0^{\pi}=\pi$

2) $J=\int_0^{\ln 2}xe^xdx$

On pose : $u'(x)=e^x$ et $v(x)=x$

Donc $u(x)=e^x$ et $v'(x)=1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0;\ln 2]$ et u' et v' sont continue sur $[0;\ln 2]$

Donc : $J=\left[xe^x\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}1e^xdx=\ln 2e^{\ln 2}-\left[e^x\right]_0^{\ln 2}$

$J=2\ln 2-\left(e^{\ln 2}-1\right)=2\ln 2-(2-1)=2\ln 2-1$

3) $K=\int_1^e\ln x dx$ on a $K=\int_1^e\ln x dx=\int_1^e 1\times\ln x dx$

On pose : $u'(x)=1$ et $v(x)=\ln x$

Donc : $u(x)=x$ et $v'(x)=1/x$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[1;e]$ et u' et v' sont continue sur $[1;e]$

Donc : $K=\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx=e\ln e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx$

$K=e-\int_1^e 1dx=e-\left[x\right]_1^e=e-e+1=1$

Exercice24 : En utilisant une intégration par partie calculer :1) $I=\int_0^1 xe^{2x}dx$ 2) $J=\int_1^{e^3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

3) $K=\int_0^1 x\sqrt{e^x}dx$ 3) $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x dx$

4) $M = \int_1^e \left(x \ln x\right) dx$ 5) $N = \int_1^e \cos\left(\ln x\right) dx$

Solution :

1) $I = \int_0^1 xe^{2x} dx$ la démarche est la même

$$I = \int_0^1 xe^{2x} dx = \frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x} dx$$

$$I = \frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$$

$$I = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_1^{e^3} x^{-\frac{2}{3}} \ln x dx$$

$$= \left[3x^{\frac{1}{3}} \ln x\right]_1^{e^3} - \int_1^{e^3} 3x^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x} dx = \left[3x^{\frac{1}{3}} \ln x\right]_1^{e^3} - 3\int_1^{e^3} x^{-\frac{2}{3}} dx$$

$$= \left[3x^{\frac{1}{3}} \ln x\right]_1^{e^3} - 9\left[x^{\frac{1}{3}}\right]_1^{e^3} = 9$$

Exercice25 : En utilisant une intégration par partie calculer :

$$J = \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx \qquad K = \int_0^1 \ln\left(1+\sqrt{x}\right) dx$$

$$M = \int_1^e x(1-\ln x) dx \qquad N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$R = \int_1^e x \ln x dx \qquad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

Exercice26 : On pose : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3} dx$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \le I_n \le \frac{2}{n+1}$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

Exercice 27: $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 1cm$

Soit f définie sur $[1;3]$ par : $f(x) = 2x+1$

1)verifier que f est continue et positif sur $[1;3]$

2)tracer Cf la courbe représentative de la fonction f sur $[1;3]$

3) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 3$

4)calculer l'intégrale : $I = \int_1^3 f(x) dx$

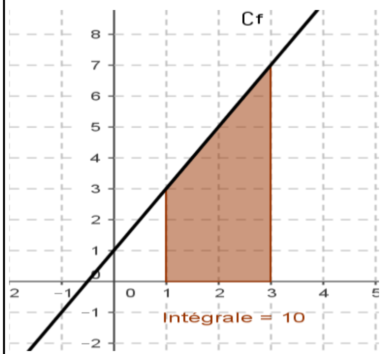
Que peut-on dire ?

Solution :1)f est une fonction polynôme donc continue sur $[1;3]$

$x \in [1;3] \Leftrightarrow 1 \le x \le 3 \Leftrightarrow 3 \le 2x+1 \le 7$

Donc :f est continue et positif sur $[1;3]$

2)



3) Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est

$$A\left(\Delta_f\right) = 2\times 3 + \frac{4\times 2}{2} = 2\times 3c^2m + \frac{4\times 2}{2}c^2m = 10c^2m$$

4) $I = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (2x+1) dx = \left[x^2+x\right]_1^3$

$I = \left(3^2+3\right) - \left(1^2+1\right) = 12 - 2 = 10$

5)on remarque que : $A\left(\Delta_f\right) = \int_1^3 f(x) dx.ua$

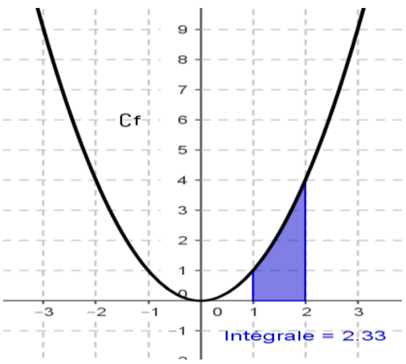
Avec : $u.a = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\| = 1\times 1 = 1$

Exercice 28: $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et Soit f définit par : $f(x) = x^2$

1)tracer C_f la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 2$

Solution :1)



2) f est continue et positif sur $[1;3]$ on a donc :
$A=\int_1^2 |f(x)|dx=\int_1^2 |x^2|dx=\int_1^2 x^2dx$

$A=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{1}{3}\times2^3-\frac{1}{3}\times1^3=\frac{7}{3}\times2cm\times2cm=\frac{28}{3}c^2m$

Exercice 29: $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthogonale avec $\|\vec{i}\|=2cm$ et $\|\vec{j}\|=3cm$

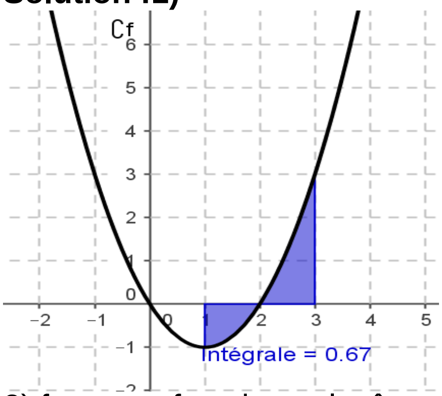
Soit f définit par : $f(x)=x^2-2x$

1)tracer Cf la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites :

$x=1$ et $x=3$

Solution :1)



2) f est une fonction polynôme donc continue sur $[1;3]$ donc : $A=\int_1^3 |f(x)|dx=\int_1^3 |x^2-2x|dx$

Etudions le signe de : x^2-2x dans $[1;3]$

$x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$A=\int_1^3 |x^2-2x|dx=\int_1^2 |x^2-2x|dx+\int_2^3 |x^2-2x|dx$

$A=\int_1^2 -(x^2-2x)dx+\int_2^3 (x^2-2x)dx$

$A=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$

$=-\frac{1}{3}\times2^3+2^2+\frac{1}{3}\times1^3-1^2+\frac{1}{3}\times3^3-3^2-\frac{1}{3}\times2^3+2^2$

$=-\frac{2}{3}\times2^3+8+\frac{1}{3}-1+\frac{27}{3}-9=-\frac{16}{3}+\frac{1}{3}+\frac{27}{3}-2$

$A=2\times2cm\times3cm=12c^2m$

Exercice30 :

$(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\|=2cm$

Soit f définit par : $f(x)=1-e^x$

Calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites :

$x=\ln 2$ et $x=\ln 4$

Solution : il suffit de calculer : $I=\int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)|dx$

$I=\int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)|dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4} |1-e^x|dx$

On sait que : $\ln 2\le x\le \ln 4$ donc : $e^{\ln 2}\le e^x\le e^{\ln 4}$

Donc : $2\le e^x\le 4$ donc $e^x>1$ par suite: $1-e^x<0$

Donc:

$I=\int_{\ln 2}^{\ln 4} |1-e^x|dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4} -(1-e^x)dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^x-1)dx$

$I=\left[e^x-x\right]_{\ln 2}^{\ln 4}=(e^{\ln 4}-\ln 4)-(e^{\ln 2}-\ln 2)$

$I=(4-2\ln 2)-(2-\ln 2)=4-2\ln 2-2+\ln 2=2-\ln 2$

Donc : $A=(2-\ln 2)\times2cm\times2cm=4(2-\ln 2)c^2m$

Exercice 31: $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\|=2cm$ et Soit f définit par : $f(x)=e^x-3$

Calculer A la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites :

$x=\ln 3$ et $x=\ln 6$

Exercice 32: $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\|=2cm$ et Soit f définit par : $f(x)=\ln x-1$

Calculer A la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites :

$x=1$ et $x=e$

Exercice 33: $(o;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\|=2cm$

Soit f et g deux fonctions tels que:

$$f(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}+e^{-x} \text{ et } g(x)=e^{-x}$$

calculer en $cm^2\,S$ la surface du domaine limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=\ln 2$

Solution : il suffit de calculer :

$$I=\int_1^e \left|f(x)-g(x)\right|dx$$

$$I=\int_0^{\ln 2}\left|\frac{2e^x}{e^x+1}+e^{-x}-e^{-x}\right|dx=\int_0^{\ln 2}\left|\frac{2e^x}{e^x+1}\right|dx=\int_0^{\ln 2}\frac{2e^x}{e^x+1}dx$$

Car : $\frac{2e^x}{e^x+1}>0$

Donc: $I=\int_0^{\ln 2}\frac{2e^x}{e^x+1}dx=2\int_0^{\ln 2}\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx=\left[2\ln\left|e^x+1\right|\right]_0^{\ln 2}$

Donc :

$$I=2\ln\left|e^{\ln 2}+1\right|-2\ln\left|e^0+1\right|=2\ln 3-2\ln 2=2\ln\frac{3}{2}$$

Donc : $A=2\ln\frac{3}{2}\times 2cm\times 2cm=8\ln\frac{3}{2}c^2m$

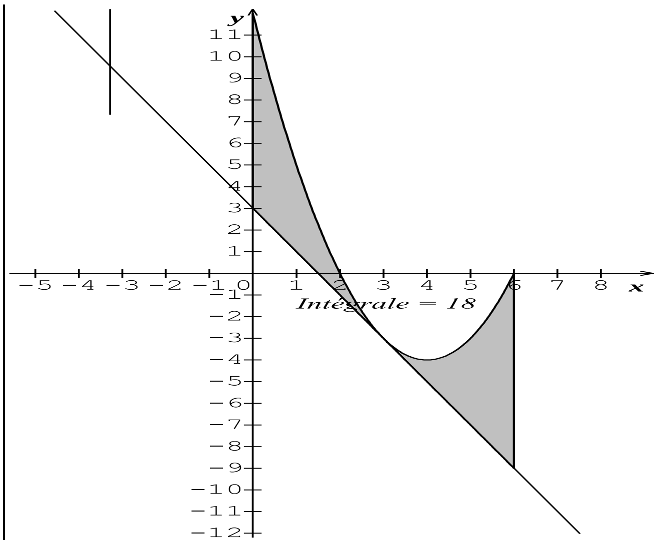
Exercice34 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\|=0.5cm$ et Soit f définit par : $f(x)=x^2-8x+12$ et (D) la tangente à la courbe (C_f) au point $A(3;f(3))$

Calculer A la surface du domaine limité par : (C_f) et les droites : (D) et $x=1$ et $x=e$

Solution : l'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point $A(3;f(3))$ est : $y=f(3)+f'(3)(x-3)$

$f'(x)=2x-8$ et $f'(3)=-2$ et $f(3)=-3$

$(D): y=-2x+3$



il suffit de calculer :

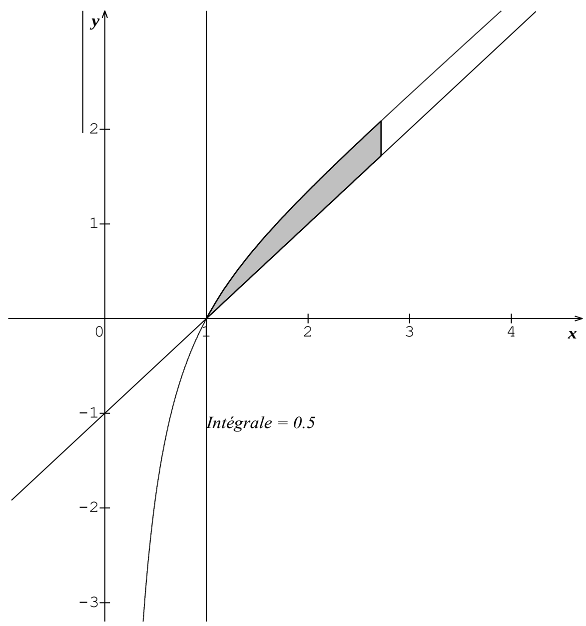
$$I=\int_0^6\left|f(x)-y\right|dx=\int_0^6\left(x^2-6x+9\right)dx=\int_0^6(x+3)'(x+3)^2dx$$

$$I=\left[\frac{(x+3)^3}{3}\right]_0^6=18 \text{ donc :}$$

$$A=18\times(0.5cm)^2=4.5cm^2$$

Exercice35 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\|=1cm$ et Soit f définit par : $f(x)=x-1+\frac{\ln x}{x}$

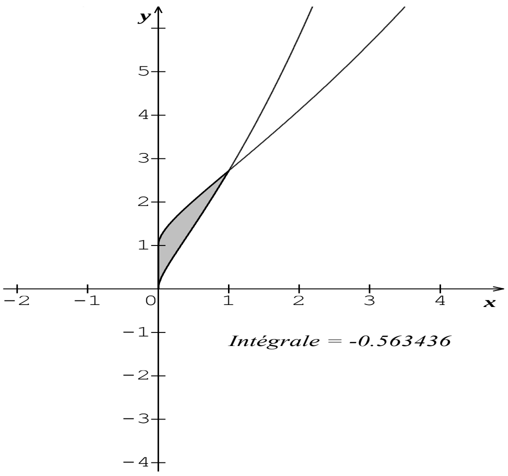
Calculer A la surface du domaine limité par : C_f et les droites : $y=x-1$ et $x=1$ et $x=e$



Exercice36 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé

Soit f et g deux fonctions tels que: $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ et $g(x)=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ Calculer A la surface du domaine limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=1$

Solution :



$S=\int_0^1\left|f(x)-g(x)\right|dx$ Ua

$S=\int_0^1\left|e^{\sqrt{x}}-\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\right|dx=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\left|1-\sqrt{x}\right|dx$

On sait que : $0\le x\le 1$ donc : $0\le\sqrt{x}\le 1$ donc :

$0\le 1-\sqrt{x}$ donc : $S==\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)dx$

On utilisant deux intégration l'une par changement de variable et l'autre par partie on trouve :

$S==\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)dx=\left[\left(6\left(\sqrt{x}-1\right)-2x\right)e^{\sqrt{x}}\right]_0^1$

$S=6-2e$ Ua

Exercice37 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\dfrac{xe^x+x+1}{e^x+1}$

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier qu'elle est strictement croissante.
2) Déterminer la surface S_1 du domaine limité par l'axe (Ox) ; la courbe C_f et les droites:
$x=0$ et $x=1$.
3) Déterminer la surface S_2 du domaine limité par la droite (Δ) $y=x$; la courbe C_f et les droites:
$x=0$ et $x=1$.

Exercice38 : $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\|=2cm$

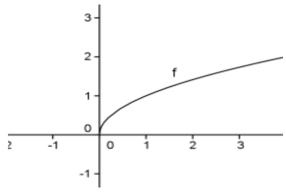
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sqrt{x}$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a=0$ et $b=4$

Solution : La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a=0$ et $b=4$ engendre un solide :

$I=\int_0^4\pi\left(f(x)\right)^2dx=\int_0^4\pi\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int_0^4 xdx$

$I=\pi\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^4=8\pi$ et on a :



$u.v=\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\|\vec{k}\|=8cm^3$

Donc le volume est : $V=8\pi\times 8cm^3=64\pi cm^3$

Exercice39 : $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\|=\dfrac{2}{3}cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\sqrt{x\left(e^x-1\right)}$ et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[0;1]$

Solution : on calcul : $\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx$

$I=\int_0^1\pi\left(f(x)\right)^2dx=\int_0^1\pi\left(\sqrt{x\left(e^x-1\right)}\right)^2dx=\pi\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx$

On utilise une intégration par partie :

On pose : $u'(x)=e^x-1$ et $v(x)=x$

Donc : $u(x)=e^x-x$ et $v'(x)=1$

Donc : $\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx=\left[x\left(e^x-x\right)\right]_0^1-\int_0^1 1\left(e^x-x\right)dx$

$\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx=e-1-\left[e^x-\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1$

$\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx=e-1-e+\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$

Donc : $I=\dfrac{1}{2}\pi$ par suite :

$V=\dfrac{1}{2}\pi\times\dfrac{8}{27}c^3m=\dfrac{4\pi}{27}c^3m$

Exercice40: $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right) = \sqrt{\ln x}$

et $\left(C\right)$ la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $\left[1;e\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien