

Lois de probabilité discrètes

I. Loi de probabilité associée à une variable aléatoire discrète

On suppose que Ω est un univers fini constitué de n résultats possibles. On suppose de plus qu'à chaque résultat possible $\omega_1, \dots, \omega_n$ est associé un nombre réel x_1, \dots, x_n . On définit ainsi une variable aléatoire X (une variable aléatoire est donc une fonction qui à un résultat ω_i associe un nombre x_i ou encore une fonction de Ω dans \mathbb{R}). La loi de probabilité de la variable X est la liste des probabilités $p(X = x_1), \dots, p(X = x_n)$. Elle peut être représentée dans un tableau.

x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$...	$p(X = x_n)$

Propriétés. Pour chaque i , $0 \leq p(X = x_i) \leq 1$ et $p(X = x_1) + p(X = x_2) + \dots + p(X = x_n) = 1$.

II. Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec les probabilités p_1, p_2, \dots, p_n . L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n.$$

La variance de X est :

$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2 = E((X - E(X))^2).$$

Résultat admis : $V(X) = (p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$.

L'écart-type de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

III. Exemples de lois discrètes

1) Loi équirépartie

La loi est dite équirépartie quand toutes les valeurs de X ont la même probabilité d'apparition.

Dans ce cas : $p(X = x_1) = p(X = x_2) = \dots = p(X = x_n) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{card}\Omega}$

2) Loi binomiale (ou loi de BERNOULLI)

Epreuve de BERNOULLI

Une épreuve de BERNOULLI est une épreuve à deux éventualités (succès et échec, pile et face, blanc et pas blanc, obtenir le 1 ou pas quand on jette un dé...) dont les probabilités respectives sont notées p et $1 - p$ (p étant un réel élément de $[0, 1]$). Une telle épreuve est appelée **épreuve de BERNOULLI de paramètre p** .

Schéma de BERNOULLI

Une expérience aléatoire consistant à répéter n fois (n étant un entier naturel non nul), de manière indépendante, une épreuve de BERNOULLI de paramètre p s'appelle un **schéma de BERNOULLI de paramètres n et p** .

Loi binomiale

A un schéma de BERNOULLI de paramètre n et p , on peut associer la variable aléatoire X égale au nombre de succès en n tentatives. Cette variable aléatoire prend donc les valeurs $0, 1, 2, \dots, n - 1, n$. La loi binomiale est la loi de probabilité associée à cette variable aléatoire et si k est un entier élément de $\{0, 1, \dots, n\}$, on a

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Espérance variance et écart-type de la loi binomiale

L'espérance de la loi binomiale de paramètre n et p est $E(X) = np$ et la variance de la loi binomiale de paramètre n et p est $V(X) = np(1 - p)$.