I. Continuité et continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point x_0 :

A. Continuité d'une fonction en un point x_0 :

a. Définition :

- f est une fonction définition sur D_f , I_{x_0} est un intervalle ouvert et contient x_0 et inclus dans D_f .

  f est continue au point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

b. Exemple :

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{|x| - 1} \ ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ f(1) = 1 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f au point $x_0 = 1$.

On a : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x|(|x| - 1)}{|x| - 1}$

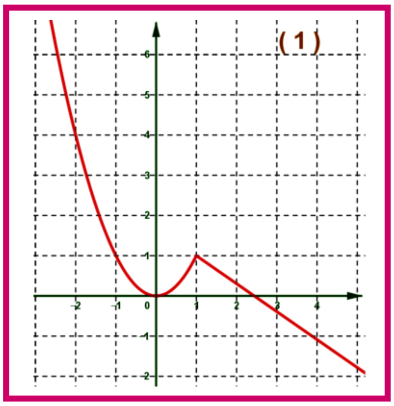
$= \lim\limits_{x \to 1} |x|$

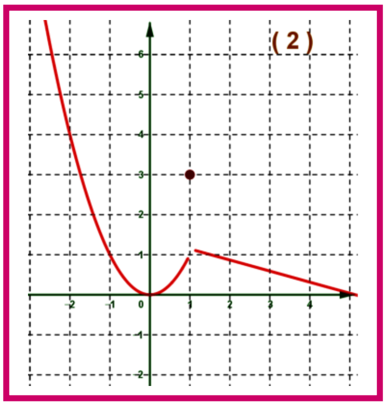
$= 1$

$= f(1)$

Conclusion : la fonction f est continue au point $x_0 = 1$.

2. La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction f





B. Continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point x_0 :

a. Définition :

f est une fonction définition sur D_f , $I_d = [x_0, x_0 + r[$; $(r > 0)$ est un intervalle inclus dans D_f .

- f est continue à droite du point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < 0}} f(x) = f(x_0)$.

f est une fonction définition sur D_f , $I_g =]x_0 - r, x_0]$; $(r > 0)$ est un intervalle inclus dans D_f .

- f est continue à gauche du point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < 0}} f(x) = f(x_0)$.

b. propriété :

f est continue au point x_0 si et seulement si f continue à droite et à gauche de x_0

Ou encore : (f est continue au point x_0) $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<0}} f(x) = f(x_0)$

c. Exemple :

- **Exemple 1 :**

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x + a\sqrt{x^2+x+1} & ;\ x \le 0 \\ f(x) = x^2\text{-}x & ;\ 0 < x \le 1 \\ f(x) = bx - \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} & ;x > 1 \end{cases}$ avec a et b de $\mathbb{R}$

1. Déterminer a et b pour que la fonction f soit la continue au point $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.

✓ Pour la continuité en $x_0 = 0$.

On a f est continue en $x_0 = 0$ donc f est continue à droite et à gauche en $x_0 = 0$.

D'abord : $f(0) = 0 + a\sqrt{0^2+0+1} = a$

- Puisque f sera continue à droite de $x_0 = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - x = 0 = f(0) = a$

D'où : $a = 0$.

- Puisque f sera continue à gauche de $x_0 = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x + a\sqrt{x^2+x+1} = a = f(0)$ et $f(0) = a$.

Donc : f est continue à gauche de $x_0 = 0$

Conséquence 1 : pour que f soit continue au point $x_0 = 0$ il faut que $a = 0$.

✓ Pour la continuité en $x_1 = 1$.

On a f est continue en $x_1 = 1$ donc f est continue à droite et à gauche en $x_1 = 1$.

D'abord : $f(1) = 1^2 - 1 = 0$.

- Puisque f sera continue à droite de $x_1 = 1$ alors :

$$\lim_{x\to 1^+} bx - \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x\to 1^+} bx - \frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} bx - \frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} bx - \frac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$= b - 2$$

D'où : $b-2=f(1) \Leftrightarrow b-2=0$,par suite $b=2$.

- Puisque f sera continue à gauche de $x_1 = 1$ alors $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 - x = 0 = f(1)$

Donc : f est continue à gauche de $x_1 = 1$

Conséquence 2 : pour que f soit continue au point $x_1 = 1$ il faut que $b = 2$.

Conclusion : les valeurs de a et b pour que la fonction f soit continue en $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ sont $a = 0$ et $b = 2$

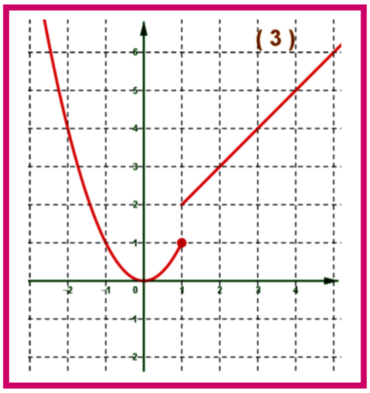
On a : $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{|x|(|x|-1)}{|x|-1}$

$$= \lim_{x\to 1} |x|$$
$$= 1$$
$$= f(1)$$

Conclusion : la fonction f est continue au point $x_0 = 1$.

- Exemple 2 :

2. La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction f .
   - Etudier graphiquement la continuité à droite et à gauche au point $x_0 = 1$
   - F est-elle continue au point $x_0 = 1$?



II. Continuité sur un intervalle :

a. Définitions :

- f est continue sur un intervalle ouvert $(I =]a,b[) \Leftrightarrow$ pour tout x de I ; f est continue en x .
- f est continue sur $[a,b[\Leftrightarrow$ f est continue sur $]a,b[$ et f est continue à droite de a .
- f est continue sur $]a,b] \Leftrightarrow$ f est continue sur $]a,b[$ et f est continue à gauche de b .
- f est continue sur $[a,b] \Leftrightarrow$ f est continue sur $]a,b[$ et f est continue à droite de a et à gauche de b .

b. Exemple :

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x$.

1. Montrer que f est continue sur l'intervalle $I =]1;5[$.

Soit $x_0 \in I =]1;5[$; montrons que f est continue en x_0 .

Pour cela il faut démontrer que : $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

On a : $f(x_0) = x_0^2 + 3x_0$ et $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x^2 + 3x = x_0^2 + 3x_0 = f(x_0)$ (car f est une fonction polynomiale).

Donc f est continue en $x_0 \in]1;5[$

Conclusion : f est continue sur $I =]1;5[$.

III. Operations sur les fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$:

a. Propriétés :

f est continue sur I et g est continue sur I.

- Les fonctions $f+g$ et $f \times g$ et αf, $(\alpha \in \mathbb{R})$ sont continues sur I.
- Les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I (pour $x \in I$ tel que $g(x) \neq 0$).

IV. Continuité des fonctions usuelles :

a. Propriété :

- Toute fonction polynômiale est continue sur $D_f = \mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition D_f .
- Les fonctions $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

b. Exemple :

Soient les fonctions 1) $f(x) = (x^2 + 3x - 2) \times \sqrt{x}$. 2) $g(x) = \frac{2x+1}{x-1} + \cos(x)$.

1. Déterminer ensemble de définition et ensemble de la continuité de chaque fonction précédente .

✓ Pour la fonction : 1) $f(x) = (x^2 + 3x - 2) \times \sqrt{x}$:

- La fonction $x \mapsto x^2 + 3x - 2$ définie et continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) .
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie et continue sur $[0, +\infty[$. **Conclusion :** f est définie et continue sur $[0, +\infty[$

✓ Pour la fonction : 2) $g(x) = \frac{2x+1}{x-1} + \cos(x)$:

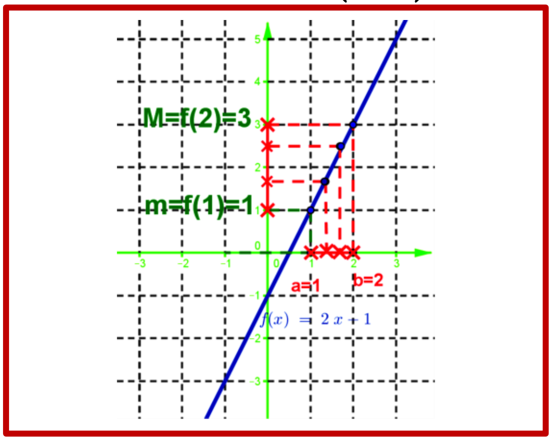
- La fonction $x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$ définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (fonction polynomiale) .
- La fonction $x \mapsto \cos x$ définie et continue sur $\mathbb{R}$. **Conclusion :** g est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

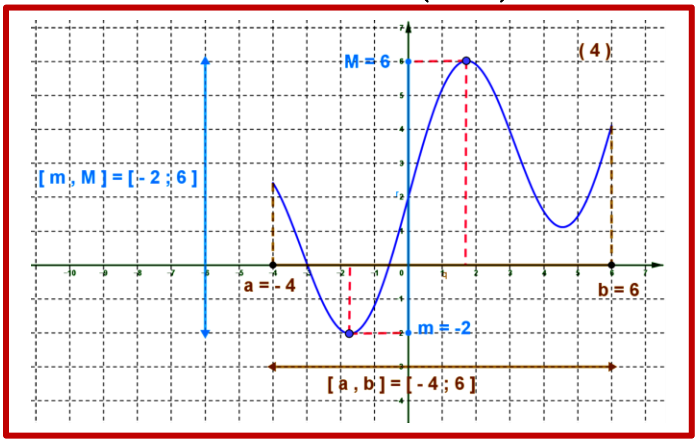
V. Image d'un intervalle par une fonction continue :

a. Propriété :

- Image du segment $[a,b]$ par une fonction continue est un segment $J = [m,M]$ (m= la plus petite image M= la plus grande image par f des éléments de $[a,b]$) $f([a,b]) = [m,M]$
- Image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle J. On note $J = f(I)$.

b. Exemple : Exemple 1 : $f\left(\left[1,2\right[\right)=\left[1,3\right[$ Exemple 2 : $f\left(\left[a,b\right[\right)=\left[m,M\right]$





VI. Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone :

Si la fonction est continue et strictement croissante		
$f\left(\left[a,b\right]\right)=\left[f(a),f(b)\right]$	$f\left(\left[a,b\right[\right)=\left[f(a),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$f\left(\left]a,b\right]\right)=\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),f(b)\right]$
$f\left(\left]a,b\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$f\left(\left[a,+\infty\right[\right)=\left[f(a),\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right[$	$f\left(\left]a,+\infty\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right[$
$f\left(\mathbb{R}\right)=\left]\lim\limits_{x\to -\infty}f(x),\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right[$	$f\left(\left]-\infty,a\right]\right)=\left]\lim\limits_{x\to -\infty}f(x),f(a)\right]$	$f\left(\left]-\infty,a\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to -\infty}f(x),\lim\limits_{x\to a^-}f(x)\right[$
Si la fonction est continue et strictement décroissante		
$f\left(\left[a,b\right]\right)=\left[f(b),f(a)\right]$	$f\left(\left[a,b\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),f(a)\right]$	$f\left(\left]a,b\right]\right)=\left[f(b),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$f\left(\left]a,b\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$	$f\left(\left[a,+\infty\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to +\infty}f(x),f(a)\right]$	$f\left(\left]a,+\infty\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to +\infty}f(x),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$f\left(\mathbb{R}\right)=\left]\lim\limits_{x\to +\infty}f(x),\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)\right[$	$f\left(\left]-\infty,a\right]\right)=\left[f(a),\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)\right[$	$f\left(\left]-\infty,a\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to a^-}f(x),\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)\right[$

VII. Continuité de la composée de deux fonctions continues :

a. Théorème :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ est contine en } x_0\\ \bullet\ g \text{ est contine en } f\left(x_0\right)\end{array}\right\}\ \text{alors la fonction } gof \text{ est continue en } x_0$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ est contine sur } I\\ \bullet\ g \text{ est contine en } f\left(I\right)\end{array}\right\}\ \text{alors la fonction } gof \text{ est continue sur } I\ .$$

b. Applications :

- ❖ $f(x)=\sin(ax+b)$ et $g(x)=\cos(ax+b)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- ❖ $h(x)=\tan(ax+b)$ est continue pour tout x tel que $ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.
- ❖ si f est positive et continue sur I alors $h(x)=\sqrt{f(x)}$ est continue sur I .

VIII. Théorème des valeurs intermédiaires :

a. Activité :

La figure ci-contre représente la fonction f , on prend $a=-2$ et $b=1$.

1. En déduit graphiquement $f(a)$ et $f(b)$.
2. On choisit un nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, graphiquement , est-ce qu'il existe un nombre c de $[a,b]=[-2,1]$ tel que : $f(c)=k$.

b. Propriété (théorème des valeurs intermédiaires) :

f est une fonction continue sur $[a,b]$.
Pout tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un élément c de $[a,b]$ tel que : $f(c)=k$

c. Conséquences :

- Puisque la fonction f est continue on a : $f([a,b])=[m,M]$ (l'image d'un segment est un segment) .
- si $f(a)$ et $f(b)$ de signe contraire $(\text{càd} : f(a)f(b)<0)$ donc $k=0\in f([a,b])=[m;M]$ alors il existe au moins un $c\in]a,b[$ $/f(c)=0$ (sans oublier que f est continue sur $[a,b]$)
- si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a)f(b)<0$ alors l'équation $x\in]a,b[/f(x)=0$ admet au moins une solution c dans $]a,b[$.

d. remarque :

- ✓ f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$ alors c est unique
- ✓ pour montrer il existe au moins un c de $[a,b]$ ou bien l'équation admet au moins une solution alors il faut que la fonction est continue.
- ✓ pour montrer il existe un et un seul c de $[a,b]$ ou bien l'équation admet une et une seule solution alors il faut que la fonction est continue et strictement monotone.

IX. Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I :

a. Théorème :

La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

- $f : I\mapsto J$ est une fonction si tout $x\in I$ a une et seule image y dans J et de même si tout $y\in J$ a un et seul antécédent y dans I
- on définie une autre fonction sera notée f^{-1} et appelée fonction réciproque de f avec :

$$f : I\to J=f(I) \quad x\mapsto f(x)=y \qquad \text{et} \qquad f^{-1} : J=f(I)\to I \quad y\mapsto f^{-1}(y)=x$$

b. Exemple :

On considère la fonction f de la variable x définie sur l'intervalle $[0,3]$ par $f(x)=x^2$.

1. Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J à déterminer .

Il faut montrer que f est continue et strictement monotone sur $[0,3]$.

- Continuité de f sur $[0,3]$.

La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sa restriction sur $[0,3]$ est continue sur $[0,3]$.

- La monotonie (strictement) de f sur $[0,3]$.

La fonction $x \mapsto x^2$ sa dérivée est $x \mapsto 2x$ don sa fonction dérivée est positive sur $[0,+\infty[$ donc La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ par suite sa restriction sur $[0,3]$ est strictement croissante sur $[0,3]$.

D'où : f est continue et strictement monotone sur $[0,3]$

- **Conclusion 1 :** la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J .
- **On détermine** J **:**

On a : $J=f([0,3])$

$=[f(0),f(3)]$ car f est continue et strictement croissante sur $[0,3]$.

$=[0;9]$. Donc : $J=[0;9]$.

Conclusion : la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J=[0;9]$.

c. Relation entre f et sa réciproque f^{-1} :

$$\left.\begin{matrix} f(x)=y \\ x\in I \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in J \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall x\in I \ : \ f^{-1}\circ f(x)=x \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall y\in J \ : \ f\circ f^{-1}(y)=y \\ \forall x\in J \ : \ f\circ f^{-1}(x)=x \end{cases}$$

d. Remarque :

Pour déterminer la fonction f^{-1}

On rédige de la façon suivante :

1ère méthode :

Soit $x\in I$ et $y\in J$ cherchons x tel que $f(x)=y$.

2ième méthode :

Soit $y\in I$ et $x\in J$ cherchons y tel que $f(y)=x$.

e. Exemple :

On considère la fonction f de la variable x définie sur l'intervalle $[0,3]$ par $f(x)=x^2$ qui admet fonction réciproque f^{-1} : $J=[0;9]\mapsto I=[0;3]$ (exemple précédent)

1. Déterminer f^{-1} :

On utilise la 1ère méthode :

On a : $\left.\begin{matrix} f(x)=y \\ x\in I \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in J \end{cases}$

Soit $y\in[0;9]$ et $x\in[0;3]$ cherchons x tel que $f(x)=y$

On résoudra l'équation $f(x)=y$.

$f(x)=y \Leftrightarrow x^2=y$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{y}\in[0;3]$ ou $x=-\sqrt{y}\notin[0;3]$

Donc : la solution est $x=\sqrt{y}$ or $\begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in J\end{cases}$ d'où $\begin{cases} f^{-1}(y)=x=\sqrt{y} \\ y\in J\end{cases}$ c.à.d. $\begin{cases} f^{-1}(y)=\sqrt{y} \\ y\in J\end{cases}$

Donc : $\begin{aligned} f^{-1}: J=f(I) &\to I \\ y &\mapsto f^{-1}(y)=\sqrt{y}\end{aligned}$ ou encore $\begin{aligned} f^{-1}: [0;9] &\to [0;3] \\ y &\mapsto f^{-1}(y)=\sqrt{y}\end{aligned}$

Au lieu de notée la variable par y , on note la variable par x .

Conclusion : l a fonction réciproque f^{-1} est définie par $\begin{aligned} f^{-1}: [0;9] &\to [0;3] \\ x &\mapsto f^{-1}(x)=\sqrt{x}\end{aligned}$

On utilise la 2ième méthode :

Soit $x\in[0;9]$ et $y\in[0;3]$ cherchons y tel que $f(y)=x$

On résoudra l'équation $f(y)=x$.

$f(y)=x \Leftrightarrow y^2=x$

$\Leftrightarrow y=\sqrt{x}\in[0;3]$ ou $y=-\sqrt{x}\notin[0;3]$

Donc : $\begin{aligned} f^{-1}: J=f(I) &\to I \\ x &\mapsto f^{-1}(x)=\sqrt{x}\end{aligned}$

Conclusion : l a fonction réciproque f^{-1} est définie par $\begin{aligned} f^{-1}: [0;9] &\to [0;3] \\ x &\mapsto f^{-1}(x)=\sqrt{x}\end{aligned}$

f. Propriété de la fonction réciproque f^{-1} :

1. La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $J=f(I)$.
2. La fonction réciproque f^{-1} et f varient dans le même sens .
3. $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à la 1er bissectrice ($(D): y=x$) .

X. La fonction racine d'ordre n (ou racine nième) :

a. Définition et théorème :

- La fonction $f(x)=x^n$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$) est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
- Sa fonction réciproque f^{-1} sera noté $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ et appelée La fonction racine d'ordre n (ou la fonction racine nième) .
- $\begin{aligned} f^{-1}=\sqrt[n]{\ } : [0,+\infty[&\to [0,+\infty[\\ x &\mapsto f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$
- $\sqrt[n]{x}$ on l'appelle racine d'ordre n du réel positif x

b. Cas particuliers :

- Cas $n=1$ on a $f^{-1}(x)=\sqrt[1]{x}=x$ (pas d'importance) . donc on prend $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
- Cas $n=2$ on a $f^{-1}(x)=\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$ (racine carrée) .
- Cas $n=3$ on a $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ (racine cubique ou racine d'ordre 3) .

c. Propriétés :

Soient a et b de $\mathbb{R}^+$ et $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$			
$\sqrt[n]{1}=1$; $\sqrt[n]{0}=0$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$	$\sqrt[n]{a^n}=a$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$
$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}\Leftrightarrow a=b$	$\sqrt[n]{a}\le\sqrt[n]{b}\Leftrightarrow a\le b$	$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$	$\sqrt[n\times m]{a^m}=\sqrt[n]{a}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[a\times m]{a}$	$(b>0)$; $\sqrt[n]{\dfrac{1}{b}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{b}}$	$(b>0)$; $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	

d. Exemple :

Simplifier : $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}}\times\sqrt[15]{3^{11}}$.

On a : $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}}\times\sqrt[15]{3^{11}}=\sqrt[3\times5]{81}\times\sqrt[15]{3^{11}}=\sqrt[15]{3^4\times3^{11}}=\sqrt[15]{3^{15}}=3$

Conclusion : $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}}\times\sqrt[15]{3^{11}}=3$

e. Limites de la fonction $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$:

Propriété :

- 1^er cas : $f(x)=x$ c.à.d. $g(x)=\sqrt[n]{x}$

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0}$; (avec $x_0\ge0$) .

- 2^ième cas le cas général : $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$
  - $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\ell}$.
  - Les deux propriétés restent vraies si on remplace $x\to x_0$ par $x\to x_0^-$; $x\to x_0^+$; $x\to\pm\infty$.

f. Exemple :

Calculons les limites :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[5]{2x+3}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}2x+3=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[5]{5x^2+1}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}5x^2+1=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{8x+8}{x+5}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x+8}{x+5}=8$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{8x+8}{x-5}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x+8}{x-5}=8$.

- $\lim\limits_{x\to5^+}\sqrt[3]{\dfrac{8x+8}{x-5}}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{8x+8}{x-5}=+\infty$ (puisque $\lim\limits_{x\to5^+}8x+8=48$ et $\lim\limits_{x\to5^+}x-5=0^+$).
- $\lim\limits_{x\to-1^-}\sqrt[3]{\dfrac{8x+8}{x-5}}=\sqrt[3]{0}=0$ car $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{8x+1}{x-5}=0^+$ (puisque $\lim\limits_{x\to-1^-}8x+8=0^-$ et $\lim\limits_{x\to-1^-}x-5=-6$).

XI. Puissance rationnelle d'un nombre réel positif :

a. Définition :

$x\in\mathbb{R}^{+*}$ et $n\in\mathbb{N}^*$ et $m\in\mathbb{Z}$ on pose $r=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$.

- Le nombre $\sqrt[n]{x^m}$ son écriture sera de la façon suivante $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ ou encore par $\sqrt[n]{x^m}=x^r$; x^r est appelé puissance rationnelle du nombre réel positif x d'exposant r .
- ($0^r=0$ avec $r\neq0$) .

b. Remarque :

La définition de l'exposant dans $\mathbb{Q}$ c'est un prolongement de l'exposant dans $\mathbb{Z}$.

c. Exemple :

- Ecrire les nombres suivants $\left(\sqrt[9]{7}\right)^{11}$ et $\sqrt[8]{3^{-5}}$ et $\left(\sqrt[9]{21}\right)^{-11}$ et $\sqrt[13]{2^{-15}}$ et $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{-32}$ sous la forme x^r :

  On a : $\left(\sqrt[9]{7}\right)^{11}=7^{\frac{9}{11}}$ et $\sqrt[8]{3^{-5}}=3^{\frac{-8}{5}}$ et $\left(\sqrt[9]{21}\right)^{-11}=21^{\frac{-9}{11}}$ et $\sqrt[13]{2^{-15}}=2^{\frac{-15}{13}}$ et $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{-32}=3^{\frac{-5}{32}}$

- $\sqrt[3]{8}$ et $\sqrt[5]{11}$ et $\sqrt{7^3}$.

  On a : $\sqrt[3]{8}=8^{\frac{1}{3}}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}=2^{3\times\frac{1}{3}}=2$ et $\sqrt[5]{11}=11^{\frac{1}{5}}$ et $\sqrt{7^3}=7^{\frac{3}{2}}$

d. Propriété :

$\forall a\in\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall b\in\mathbb{R}^{+*}$.			
$a^r\rangle0$ avec $r,r'\in\mathbb{Q}$	$a^r=b^{r'}\Leftrightarrow r=r'$	$a^r\times a^{r'}=a^{r+r'}$	$a^r\times b^r=(a\times b)^r$
$\left(a^r\right)^{r'}=a^{r\times r'}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$	$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$	$\dfrac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$

e. Exemple :

Simplifier : $A=\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5\times\left(4^{-\frac{1}{2}}\right)\times\left(8^{\frac{2}{3}}\right)$.

On a : $A=\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5\times\left(4^{-\frac{1}{2}}\right)\times\left(8^{\frac{2}{3}}\right)=2^{\frac{-5}{3}}\times\left(2^2\right)^{\frac{2}{3}}\times\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{-5}{3}}\times2^{2\times\frac{2}{3}}\times2^{3\times\frac{2}{3}}=2^{\frac{-5+4+6}{3}}=2^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{2^5}$.

- $B=\dfrac{\sqrt[3]{7}\times7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}}$ .On a : $B=\dfrac{\sqrt[3]{7}\times7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}}=\dfrac{7^{\frac{1}{3}}\times7^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{-1}{4}}}=\dfrac{7^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{7^{\frac{-1}{4}}}=7^{1+\frac{1}{4}}=7^{\frac{5}{4}}$.