الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2020
- الموضوع -

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | RS 22F

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

3	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ **L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;**
- ✓ **Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;**
- ✓ **L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.**

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	**Suites numériques**	**2 points**
Exercice 2	**Nombres complexes**	**5 points**
Exercice 3	**Dérivabilité et calcul intégral**	**4 points**
Problème	**Etude d'une fonction numérique et suites numériques**	**9 points**

- ✓ **On désigne par $|z|$ le module du nombre complexe z et par $\overline{z}$ le conjugué de z**
- ✓ $\ln$ **désigne la fonction logarithme népérien**

Exercice 1 : (2 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 8}{2u_n - 5}$ pour tout n de $I\!N$

0.5 1) Montrer que pour tout n de $I\!N$, $u_n < 2$

2) On pose pour tout n de $I\!N$, $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$

0.5 a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2

0.75 b) Ecrire v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de $I\!N$.

0.25 c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 : (5 points)

0.75 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

2) On pose $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

0.75 a) Ecrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2020} est un nombre réel

0.5 b) Soit le nombre complexe $b = \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}$. Prouver que $b^2 = a$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que $c = 1$. La rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{8}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z'.

0.25 a) Vérifier que $z' = bz$

0.5 b) Déterminer l'image de C par la rotation R et montrer que A est l'image de B par R.

0.75 4) a) Montrer que $|a - b| = |b - c|$ et en déduire la nature du triangle ABC

0.5 b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

5) Soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ et D l'image de A par T

0.25 a) Vérifier que l'affixe de D est $b^2 + 1$

0.75 b) Montrer que $\dfrac{b^2 + 1}{b} = b + \overline{b}$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés

Exercice 3 : (4 points)

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=e^{x}-2x+2-3e^{-x}$

0.5 — 1)a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $u'(x)=\dfrac{(e^{x}-1)^{2}+2}{e^{x}}$

0.25 — b) poser le tableau de variation de la fonction u (sans calcul de limite) ;

0.5 — c) En déduire le signe de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (remarquer que $u(0)=0$)

2) Soit la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=e^{2x}-2xe^{x}+2e^{x}-3$

0.5 — a)Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $v(x)=e^{x}u(x)$

0.5 — b) En déduire le signe de la fonction v sur $\mathbb{R}$

0.5 — 3) a) Montrer que la fonction W définie par $W(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+(4-2x)e^{x}-3x$ est une primitive de la fonction v sur $\mathbb{R}$

0.5 — b) Calculer l'intégrale $\int_{0}^{2}v(x)dx$

0.75 — c) Montrer que $\dfrac{9}{2}$ est le minimum absolu de la fonction W sur $\mathbb{R}$.

Problème : (9 points)

I - Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=e^{1-x}+\dfrac{1}{x}-2$

0.5 — 1) Monter que $g'(x)<0,$ pour tout $x\in\,]0,+\infty[$

0.5 — 2) Déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$; (remarquer que $g(1)=0$)

II – On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$f(x)=(1-x)e^{1-x}-x^{2}+5x-3-2\ln x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm)

0.5 — 1) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement

0.5 — 2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

0.75 — b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement

1 — 3) a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=(x-2)g(x)$

0.75 — b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et sur $[2,+\infty[$ et croissante sur $[1,2]$

0.25 — c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$, (on admet $f(2)\approx 1,25$)

0.5 **4) Sachant que** $f(3) \approx 0,5$ **et** $f(4) \approx -1,9$ **montrer que l'équation** $f(x)=0$ **admet une solution unique dans l'intervalle** $]3,4[$.

1 **5) Construire** (C) **dans le repère** $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

III - On pose $h(x) = f(x) - x$ **pour tout** x **de l'intervalle** $[1,2]$

0.5 **1) a) A partir du tableau de variations de la fonction** h **ci-contre montrer que** $f(x) \le x$ **pour tout** x **de l'intervalle** $[1,2]$

x	1	2
$h(x)$	0 ↘	$h(2)$

0.25 **b) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation** $f(x) = x$ **sur l'intervalle** $[1,2]$

2) Soit (u_n) **la suite numérique définie par :** $u_0 = 2$ **et** $u_{n+1} = f(u_n)$ **pour tout** n **de** IN

0.75 **a) Montrer par récurrence que** $1 \le u_n \le 2$ **pour tout** n **de** IN

0.5 **b) Montrer que la suite** (u_n) **est décroissante.**

0.75 **c) En déduire que la suite** (u_n) **est convergente et calculer** $\lim_{n \to +\infty} u_n$