

**Exercice 1 :** (2012 S1) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct  $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  les points  $A(1;1;-1)$ ,  $B(0;1;-2)$  et  $C(3;2;1)$  et

(S) la sphère d'équation:  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$

1) Montrer que (S) est de centre  $\Omega(1; 0; 1)$  et de rayon  $\sqrt{3}$

2) a) Montrer que :  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} - \vec{k}$  et vérifier que :  $\mathbf{x} - \mathbf{z} - 2 = 0$  est une équation cartésienne du plan (ABC).

b) Vérifier que :  $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$  puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle ( $\Gamma$ ) de rayon 1.

3) Soit ( $\Delta$ ) la droite passant par  $\Omega$  et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Montrer que  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$  est une

représentation paramétrique de la droite ( $\Delta$ ).

b) Montrer que le triplet de coordonnées de H point d'intersection du plan (ABC) et de la droite ( $\Delta$ ) est  $(2; 0; 0)$

c) En déduire le centre du cercle ( $\Gamma$ )

**Exercice 2 :** (2012 S1) (3pts)

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $Z^2 - 12Z + 61 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(\mathbf{O}; \vec{u}; \vec{v})$  on considère les points A, B et C d'affixes respectives  $\mathbf{a} = 6 - 5\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{b} = 4 - 2\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{c} = 2 + \mathbf{i}$

a) Calculer  $\frac{\mathbf{a} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}}$  et en déduire que A, B et C sont alignés.

On considère la translation T de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $1 + 5\mathbf{i}$   
b – Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est  $d = 3 + 6\mathbf{i}$

c – Montrer que  $\frac{\mathbf{d} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}} = -1 + \mathbf{i}$  et que  $\frac{3\pi}{4}$  est un argument de  $-1 + \mathbf{i}$

d – En déduire une mesure de l'angle  $(\vec{CB}; \vec{CD})$

**Exercice 3 :** (2012 S1) (3pts)

Un sac contient huit jetons, indiscernables au toucher : un jeton porte le chiffre 0, cinq jetons portent le chiffre 1 Et deux jetons portent les chiffres 2.

On tire simultanément et au hasard trois jetons du sac On considère les événements suivants:

1) A " Obtenir trois jetons portant des chiffres différents deux à deux ". Montrer que :  $P(A) = \frac{5}{28}$

2) B "la somme des chiffres portés par les jetons tirées est égal à 5 ". Montrer que :  $P(B) = \frac{5}{56}$

3) C "la somme des chiffres portés par les jetons tirées est égal à 4 " Montrer que :  $P(C) = \frac{3}{8}$

**Exercice 3 :** (2012 S1) (3pts)

On considère la suite  $(U_n)$  définie par :

$$U_{n+1} = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 11$$

1) Montrer que:  $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) Montrer que :  $U_n < 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que  $(U_n)$  est strictement croissante

c) En déduire que  $(U_n)$  est convergente.

3) On considère la suite  $(V_n)$  définie par :

$$V_n = U_n - 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{10}{11}$  puis écrire  $V_n$  en fonction de n.

b) Montrer que  $U_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  puis

calculer  $\lim U_n$

**Problème :** (2012 S1) (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$$

1) a) Montrer que  $x^2 - 1$  et  $2x^2 \ln x$  ont même signe Sur  $]0, 1[$  et en déduire que  $\forall x \in ]0, 1[ \quad g(x) \leq 0$

b) Montrer que  $x^2 - 1$  et  $x^2 \ln x$  ont même signe Sur  $]1, +\infty[$  et en déduire que  $\forall x \in ]1, +\infty[ \quad g(x) \geq 0$

II) On considère la fonction f définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln x$$

$(C_f)$  est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé  $(\mathbf{O}; \vec{i}; \vec{j})$  (unité : 3 cm)

1) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  et en déduire une interprétation géométrique du résultat.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  puis en déduire une interprétation géométrique du résultat.

2) a) Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x} \quad \forall x \in ]0, +\infty[$

Et interpréter géométriquement le résultat  $f'(1) = 0$

b) En déduire que f est décroissante sur  $]0, 1[$  et croissante sur  $]1, +\infty[$

c) Dresser le tableau des variations de f et montrer que  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]0, +\infty[$

3) Construire la courbe  $(C_f)$ .

4) a – Montrer que  $\mathbf{u} : x \rightarrow \frac{x^3}{3} - x$  est une primitive de

la fonction  $x \rightarrow x^2 - 1$  sur  $\mathbb{R}$

b – A l'aide d'une intégration par parties montrer

$$\text{que : } \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx = \frac{2}{9}(1 + 3 \ln 2)$$

c – Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine limité par  $(C_f)$ ; l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 2$ .