Cours : CALCULS INTEGRALES

Avec Exercices de rappels et d'applications et de réflexions avec solutions

PROF : ATMANI NAJIB **2BAC sciences expérimentales (pc et svt.)**

CALCULS INTEGRALES

I) INTEGRATION D'UNE FONCTION CONTINUE.

1) Activité :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ l'unité choisie étant le centimètre .

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x)=3$ et on note C sa courbe représentative.

Soit R la partie du plan limitée par C , l'axe des abscisses , et les droites d'équations :

x = −1 et x = 2 .

a) Calculer l'aire A en cm² de R.

b) Déterminer une primitive F de f sur IR et calculer F (2) − F (−1).

c)) Déterminer une autre primitive G de f sur IR et calculer G (2) − G (−1).

2) Intégral et primitive.

2.1 Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I ; et F une fonction primitive de f sur I. Le nombre $\boldsymbol{F(b)-F(a)}$ s'appelle l'intégrale de la fonction $\boldsymbol{f}$ entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ on écrit : $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

on lit somme $f(x)dx$ de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ et on l'appelle intégrale de a à b.

Le réel a s'appelle la borne inférieure de l'intégrale et le réel b s'appelle la borne supérieure de l'intégrale.

Remarque : 1)Dans l'écriture : $\int_a^b f(t)dt$

la variable t s'appelle une variable muette, on peut le changer par n'importe qu'elle variable tant qu'elle ne figure pas dans l'une des deux bornes.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(s)ds==\left[F(x)\right]_a^b$$

2) Si F_1 et F_2 sont deux fonctions primitive de f sur I

alors :$(\forall x\in I)(\ F_2(x)=F_1(x)+C\ )$ (C *constante*)

Et on aura : $F_2(b)-F_2(a)=\left(F_1(b)+c\right)-F_2(a)+c$

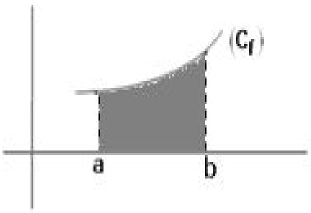
$F_2(b)-F_2(a)=F_1(b)-F_1(a)$ donc pour le calcul d'une intégrale, on prend $C=0$.

2.2) Interprétation géométrique de l'intégrale.

si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

l'intégrale de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ de la fonction f represente l'aire du domaine délimité par :

- L'axe des abscisses
- Les droites d'équation : x = $\boldsymbol{a}$ et x = $\boldsymbol{b}$
- La courbe de f .



2.3 Propriété : Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ c'est-à-dire $\int_a^b f(x)dx$ existe et finie.

2.4 Exemples :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_2^4 3x\,dx$ **2)** $J=\int_0^1(2x+3)dx$

3) $K=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}dt$ 4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)d\theta$

Solution : 1)la fonction $x\mapsto 3x$ est continue sur $[2;4]$

Une primitive sur $[2;4]$ est : $x\mapsto\frac{3}{2}x^2$

Donc : $I=\int_2^4 3x\,dx=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_2^4=\frac{3}{2}\times4^2-\frac{3}{2}\times2^2=18$

2) $J=\int_0^1(2x+3)dx=\left[x^2+3x\right]_0^1=(1+3)-(0)=4$

3) $K=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}dt=\left[\ln t\right]_e^{e^2}=\ln e^2-\ln e=2-1=1$

4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin0=\frac{1}{2}$

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_0^2 (2x-1)\,dx$ 2) $I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2)\,dx$

3) $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ 4) $I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t}\,dt$

5) $I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} te^{-t^2}\,dt$ 6) $I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$

7) $I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ 8) $I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx$

9) $I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ 10) $I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}\,dx$

11) $I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx$ 12) $I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x\,dx$

13 $I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5}\,dx$ 14) $I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x)\,dx$

15) $I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$ 16) $I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx$

17) $I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx$ 18) $I_{18} = \int_0^1 (x-1)e^{(x-1)^2}\,dx$

19) $I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx$ 20) $I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2\,dx$

21) $I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x}\,dx$

Solution : 1) $I_1 = \int_0^2 (2x-1)\,dx = \left[2\frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 = \left[x^2 - x \right]_0^2$

$I_1 = (2^2 - 2) - (0^2 - 0) = 4 - 2 = 2$

$I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2)\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{4}x^4 + 2x \right]_{-1}^1 = \left[\frac{1}{5}x^5 - 1x^4 + 2x \right]_{-1}^1$

$I_2 = \left[\frac{1}{5}x^5 - 1x^4 + 2x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{5}1^5 - 1^4 + 2 \right) - \left(\frac{1}{5}(-1)^5 - (-1)^4 - 2 \right)$

$I_2 = \left(\frac{1}{5} - 1 + 2 \right) - \left(-\frac{1}{5} - 1 - 2 \right) = \frac{1}{5} - 1 + 2 + \frac{1}{5} + 1 + 2 = \frac{2}{5} + 4 = \frac{22}{5}$

3) $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t}\,dt = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2}(2t)' e^{2t}\,dt = \left[\frac{1}{2}e^{2t} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}e^{2\ln 2} - \frac{1}{2}e^{2\times 0}$

$I_4 = \frac{1}{2}e^{\ln 2^2} - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}4 - \frac{1}{2}e^0 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

5) $I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} te^{-t^2}\,dt = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} -\frac{1}{2}(-t^2)' e^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 2}}$

$I_5 = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 2}} = -\frac{1}{2}e^{-(\sqrt{\ln 2})^2} + \frac{1}{2}e^{-0^2} = -\frac{1}{2}e^{-(\sqrt{\ln 2})^2} + \frac{1}{2}$

$I_5 = -\frac{1}{2}e^{-\ln 2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{e^{\ln 2}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

6) $I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln^2 x\,dx = \int_1^e \ln' x \times \ln^2 x\,dx$

$I_6 = \left[\frac{1}{2+1}\ln^{2+1} x \right]_1^e = \frac{1}{3}\ln^3 e - \frac{1}{3}\ln^3 1 = \frac{1}{3}$

7) $I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx = \left[\ln\left|e^x+1\right| \right]_0^{\ln 2}$

$I_7 = \ln\left|e^{\ln 2}+1\right| - \ln\left|e^0+1\right| = \ln|3| - \ln|2| = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{(e^x - e^{-x})'}{e^x - e^{-x}}\,dx = \left[\ln\left|e^x - e^{-x}\right| \right]_{\ln 2}^{\ln 3}$

$I_8 = \ln\left|e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}\right| - \ln\left|e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}\right| = \ln\left|3 - \frac{1}{e^{\ln 3}}\right| - \ln\left|e^{\ln 2} - \frac{1}{e^{\ln 2}}\right|$

$I_8 = \ln\left|3 - \frac{1}{3}\right| - \ln\left|2 - \frac{1}{2}\right| = \ln\left(\frac{8}{3}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{2}}\right) = \ln\left(\frac{16}{9}\right)$

9) $I_9 = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx = \int_1^e (\ln x)'(\ln x)^1\,dx = \left[\frac{1}{1+1}(\ln x)^{1+1} \right]_1^e$

$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx = \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2$

$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

$I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}\,dx = 2\int_2^3 \frac{(x^2+3x-4)'}{2\sqrt{x^2+3x-4}}\,dx = 2\left[\sqrt{x^2+3x-4} \right]_2^3$

$I_{10} = 2\left[\sqrt{x^2+3x-4} \right]_2^3 = 2\left(\sqrt{14} - \sqrt{6} \right)$

$$I_{11}=\int_0^1\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(2x+1)'(2x+1)^{\frac{1}{2}}dx=2\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1$$

$$I_{11}=2\left[\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{3}(3)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}(1)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\left(\left(\sqrt{(3)}\right)^3-1\right)=\frac{4}{3}\left(3\sqrt{(3)}-1\right)$$

12) $I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'\sin^3 xdx=\left[\frac{1}{4}\sin x^{3+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$I_{12}=\frac{1}{4}\sin^4\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin^4 0=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$$

$$I_{13}=\int_1^2\frac{3}{(3x-4)^5}dx=3\int_1^2(3x-4)^{-5}dx=\int_1^2(3x-4)'(3x-4)^{-5}dx$$

$$I_{13}=\left[\frac{1}{-5+1}(3x-4)^{-5+1}\right]_1^2=\left[\frac{1}{-4}(3x-4)^{-4}\right]_1^2=\frac{1}{-4}(2)^{-4}-\frac{1}{-4}(-1)^{-4}$$

$$I_{13}=\frac{1}{-4}\times\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{64}+\frac{16}{64}=\frac{15}{64}$$

14) $I_{14}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-\cos 3x)dx=\left[2x-\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$$I_{14}=\left(2\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}\sin\pi\right)-0=\frac{2\pi}{3}$$

15) $I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx$

(on a : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$: linearization) Donc:

$$I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)dx$$

$$I_{15}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_{15}=\frac{\pi+2}{8}$$

16) $I_{16}=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x+1}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\frac{(2x+1)'}{2x+1}\right)dx$

$$=\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_0^1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln|3|+1-\frac{1}{2}\ln|1|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 3$$

17) $I_{17}=\int_1^e\frac{\ln^3 x}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\times\ln^3 xdx=\int_1^e\ln' x\times\ln^3 xdx$

$$I_{17}=\left[\frac{1}{3+1}\ln^{3+1}x\right]_1^e=\frac{1}{4}\ln^4 e-\frac{1}{4}\ln^4 1=\frac{1}{4}$$

$$I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx=\int_0^1\frac{1}{2}\left((x-1)^2\right)'e^{(x-1)^2}dt=\left[\frac{1}{2}e^{(x-1)^2}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}e^0-\frac{1}{2}e^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e=\frac{1}{2}(1-e)$$

19) $I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^2\frac{\frac{1}{x}}{(1+\ln x)}dx$

$$I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^2\frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)}dx=\left[\ln|1+\ln x|\right]_1^2$$

$$I_{19}=\ln|1+\ln 2|-\ln|1+\ln 1|=\ln|1+\ln 2|=\ln(1+\ln 2)$$

20) $I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1+(\tan x)^2-1dx$

$$I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\left(1+(\tan x)^2\right)-1\right)dx=\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_{20}=\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$$

21) $I_{21}=\int_1^e\frac{8x^9-4x+2}{x}dx=\int_1^e\left(8x^8-4+\frac{2}{x}\right)dx$

$$=\left[\frac{8}{9}x^9-4x+2\ln x\right]_1^e=\frac{8}{9}e^9-4e+\frac{46}{9}$$

Formules importantes : $\cos(2a)=1-2\sin^2 a$

$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$; $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$; $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$

$\sin(2a)=2\sin a\times\cos a$

3) Intégral et operation et règles de calculs

Propriété1 :

Soient f, g et f' des fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c trois éléments de I et α un réel, on a :

1) $\int_a^b f'(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

2) $\int_a^b\alpha dx=[\alpha x]_a^b=\alpha(b-a)$

3) $\int_a^a f(x)dx=0$

4) $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

5) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

(Relation de Chasles)

6) $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (linéarité)

7) $\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$

Preuve :

Démontrons par exemple la Relation de Chasles f étant une fonction continue sur I, elle admet une primitive sur cet intervalle.

Notons F une primitive de f sur I.

Pour démontrer l'égalité annoncée, calculons séparément chaque membre de l'égalité :

$\int_a^c f(x)dx$ = F(c) − F(a) par définition

$\int_c^b f(x)dx$ = F(b) - F(c)

$\int_a^b f(x)dx =$ F(b) − F(a)

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ = F(c) − F(a)+ F(b) - F(c)

= F(b) − F(a)

L'égalité annoncée est donc vraie.

Exemple1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^3 |x-1|dx$ 2) $J = \int_{-2}^0 |x(x+1)|dx$

Solution :1)on a $x \in [0,3]$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ on va étudier le signe de : $x-1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

la Relation de Chasles donne :

$$I = \int_0^3 |x-1|dx = \int_0^1 |x-1|dx + \int_1^3 |x-1|dx$$

$$I = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^3 (x-1)dx$$

$$I = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3 = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}-3\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{5}{2}$$

2) $J = \int_{-2}^0 |x(x+1)|dx$

$x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-1$

on va étudier le signe de : $x(x+1)$

a)si $x \in [-2;-1]$ alors : $x(x+1) \geq 0$

donc : $|x(x+1)| = x(x+1)$

b)si $x \in [-1;0]$ alors : $x(x+1) \leq 0$

$|x(x+1)| = -x(x+1)$

La Relation de Chasles donne :

$$J = \int_{-2}^0 |x(x+1)|dx = \int_{-2}^{-1} |x(x+1)|dx + \int_{-1}^0 |x(x+1)|dx$$

$$J = \int_{-2}^{-1} (x^2+x)dx + \int_{-1}^0 (-x^2-x)dx$$

$$J = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0$$

$$J = \left(\frac{1}{6} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) + \left(0 - \left(-\frac{1}{6}\right)\right) = 1$$

Exemple2: on pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

1)Calculer $I+J$ et $I-J$

2)en déduire I et J

Solution :

1) $I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx$

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}$$

2) $\begin{cases} I+J = \dfrac{\pi}{4} \\ I-J = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ par sommation on trouve:

$2I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ donc : $I = \frac{\pi+2}{8}$ et on replace dans dans la 1ére équation et on trouve: $\frac{\pi+2}{8} + J = \frac{\pi}{4}$

Donc: $J = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi+2}{8} = \frac{2\pi-\pi-2}{8} = \frac{\pi-2}{8}$

Exercice2 :

on pose : $I=\int_0^{l\,n16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ et $J=\int_0^{l\,n16}\frac{1}{e^x+4}dx$

1)Calculer $I+J$ et $I-3J$

2)en déduire I et J

Solution :1)

$$I+J=\int_0^{l\,n16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx+\int_0^{l\,n16}\frac{1}{e^x+4}dx=\int_0^{l\,n16}\left(\frac{e^x+3}{e^x+4}+\frac{1}{e^x+4}\right)dx$$

$$I+J=\int_0^{l\,n16}\left(\frac{e^x+4}{e^x+4}\right)dx=\left[x\right]_0^{l\,n16}=l\,n16-0=4l\,n2$$

$$I-3J=\int_0^{l\,n16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx-3\int_0^{l\,n16}\frac{1}{e^x+4}dx=\int_0^{l\,n16}\left(\frac{e^x+3}{e^x+4}-\frac{3}{e^x+4}\right)dx$$

$$I-3J=\int_0^{l\,n16}\frac{e^x}{e^x+4}dx=\int_0^{l\,n16}\frac{\left(e^x+4\right)'}{e^x+4}dx=\left[\ln\left|e^x+4\right|\right]_0^{l\,n16}$$

$$I-3J=\ln\left|e^{l\,n16}+4\right|-\ln\left|e^0+4\right|=\ln|20|-\ln|5|=\ln 20-\ln 5$$

$$I-3J=\ln\frac{20}{5}=\ln 4=2\ln 2$$

2) $\begin{cases}I+J=4l\,n2\\I-3J=2l\,n2\end{cases}$ par soustraction on trouve:

$4J=2l\,n2$ donc: $J=\frac{l\,n2}{2}$

Et on replace dans dans la 1ére équation et on trouve :

$\frac{l\,n2}{2}+I=4l\,n2$ donc: $I=4l\,n2-\frac{l\,n2}{2}=\frac{7l\,n2}{2}$

Exercice3 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_1^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$ 2) $I=\int_0^{\ln 3}\left|2-e^x\right|dx$

3) $I=\int_0^2\left|x^2-x-2\right|dx$

Solution : 1) $x-2=0\Leftrightarrow x=2$

étude du signe de: $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

La Relation de Chasles donne :

$$I=\int_1^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx=\int_0^2\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\int_2^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$=\int_0^2\frac{-(x-2)}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\int_2^3\frac{x-2}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{-\left(x^2-4x\right)'}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{\left(x^2-4x\right)'}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-4x}\right]_1^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-4x}\right]_2^3$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-4}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{6}-\frac{2}{8}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

2) $I=\int_0^{\ln 3}\left|2-e^x\right|dx$

$2-e^x\geq 0\Leftrightarrow e^x\leq 2\Leftrightarrow x\leq\ln 2$

$$I=\int_0^{\ln 2}\left|2-e^x\right|dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left|2-e^x\right|dx$$

$$I=\int_0^{\ln 2}\left(2-e^x\right)dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x-2dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[2x-e^x\right]_0^{\ln 2}+\left[e^x-2x\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I=\left(\left(2\ln 2-2\right)+1\right)+\left(\left(3-2\ln 3\right)-\left(2-2\ln 2\right)\right)=\ln\left(\frac{16}{9}\right)$$

Exercice4 : 1)verifier que :

$\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}\quad \frac{4x-5}{x^2-1}=\frac{9}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}$

2) Calculer l' intégrale suivante : $I=\int_3^5\frac{4x-5}{x^2-1}dx$

Solution :1)

$$\frac{9}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}=\frac{18(x-1)-2(x+1)}{4(x+1)(x-1)}=\frac{18x-18-2x-2}{4(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{16x-20}{4(x+1)(x-1)}=\frac{4x-5}{(x+1)(x-1)}=\frac{4x-5}{x^2-1}$$

2) $I=\int_3^5\frac{4x-5}{x^2-1}dx=\int_3^5\left(\frac{9}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}\right)dx$

$$=\frac{9}{2}\int_3^5\frac{1}{(x+1)}dx-\frac{1}{2}\int_3^5\frac{1}{x-1}dx=\frac{9}{2}\int_3^5\frac{(x+1)'}{(x+1)}dx-\frac{1}{2}\int_3^5\frac{(x-1)'}{x-1}dx$$

$$=\frac{9}{2}\left[\ln|x+1|\right]_3^5-\frac{1}{2}\left[\ln|x-1|\right]_3^5=\frac{9}{2}(\ln 6-\ln 4)-\frac{1}{2}(\ln 4-\ln 2)$$

$I=\frac{9}{2}\ln 6-\frac{9}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{9}{2}\ln 6-\frac{19}{2}\ln 2$

Exercice5 :on pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx$

1)montrer que : $\cos^4 x=\frac{1}{8}\left(\cos 4x+4\cos 2x+3\right)$

$\forall x\in\mathbb{R}$ (linéarisation de $\cos^4 x$)

2)en déduire l'intégrale I

Solution :1)on a : $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ donc :

$$\cos^4 x=\left(\frac{e^{iX}+e^{-iX}}{2}\right)^4$$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(e^{ix}\right)^4+4\left(e^{ix}\right)^3\cdot\left(e^{-ix}\right)+6\left(e^{ix}\right)^2\cdot\left(e^{-ix}\right)^2+4\left(e^{ix}\right)^1\cdot\left(e^{-ix}\right)^3+\left(e^{-ix}\right)^4\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{i3x}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}+4e^{2ix}+4e^{2ix}+6\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+4\left(e^{2ix}+e^{2ix}\right)+6\right)$$

Or on sait que :

$2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$ t $2\cos nx=e^{inx}+e^{-inx}$

Donc : $\cos^4\theta=\frac{1}{16}\left(\left(2\cos 4x\right)+4\left(2\cos 2x\right)+6\right)$

Donc: $\cos^4 x=\frac{1}{8}\left(\cos 4x+4\cos 2x+3\right)$

2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 4x+4\cos 2x+3\right)dx$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x+4\frac{1}{2}\sin 2x+3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 2\pi+4\frac{1}{2}\sin\pi+3\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{16}$$

4) Intégrales et ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a\in I$ et $b\in I$ et $a\le b$

1)Si f est positive sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x)dx\ge 0$

2) Si $\left(\forall x\in[a;b]\right); f(x)\le g(x)$ alors :

$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

3) $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b\left|f(x)\right|dx$

Preuve :1) Soit F une fonction primitive de la fonction f sur I. on a : $\int_a^b f(x)dx==F(b)-F(a)$

Et comme $f(x)=F'(x)$ est positive alors F est croissante et par suite $(a<b)$ $F(b)-F(a)\ge 0$

2) On pose $h(x)=f(x)-g(x)$ et on applique la propriété précédente

3)On a $(\forall x\in[a,b])$: $-\left|f(x)\right|\le f(x)\le\left|f(x)\right|$

En passant à l'intégrale on en déduit :

$-\left|\int_a^b\left|f(x)\right|dx\le\int_a^b f(x)dx\right|\int_a^b\left|f(x)\right|dx$

$-\int_a^b\left|f(x)\right|\le\int_a^b f(x)\le\int_a^b\left|f(x)\right|$

Et par suite : $\left|\int_a^b f(x)dx\le\right|\int_a^b\left|f(x)\right|dx$

Remarques : Les réciproques de chacun des points de cette propriété sont fausses.

1)Par exemple : $\int_0^2\left(x^2-1\right)dx=\frac{2}{3}$ mais pourtant, la fonction : $x\to x^2-1$ n'est pas positive sur [0 ; 2] : car l'image de 0 est −1.

2)De même $\int_0^2 1dx\le\int_0^2 x^2dx$ puisque $2\le\frac{6}{3}$ mais la fonction $x\to x^2$ n'est pas toujours Supérieure à 1 sur [0 ; 2].

Exemple1 : Montrer les inégalités suivantes

1) $\int_1^e\ln x dx\ge 0$ 2) $\frac{1}{e}\le\int_0^1 e^{-x^2}dt\le 1$

Solution :1)on a $\ln$ positive et continue sur le segment$[1;e]$ et $1\le e$ donc : $\int_1^e\ln x dx\ge 0$

2) Montrons que : $\frac{1}{e}\le\int_0^1 e^{-x^2}dt\le 1$

Soit $t\in[0;1]$ donc donc $-1\le -t^2\le 0$ et puisque :

$x\mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ alors : $e^{-1}\le e^{-x^2}\le 1$

Et puisque : $t\mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0;1]$ et

$0\prec 1$ Alors : $\int_0^1 e^{-1}dt\le\int_0^1 e^{-t^2}dt\le\int_0^1 1dt$

Donc : $\frac{1}{e}\le\int_0^1 e^{-x^2}dt\le 1$

Exemple2 : Montrer que : $\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \frac{1}{3}$

Solution : on a $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$

Donc : $\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2$

Donc : $\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^2 dx$

Donc : $\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 \leq I \leq \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$ Donc : $\frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3}$

Exercice6 : soit la suite numérique (u_n) définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que (u_n) est croissante

2) Montrer que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solution : 1) $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$

$= \int_0^1 \left(\frac{1+x^n - 1 - x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx$

On sait que : $0 \leq x \leq 1$ donc : $0 \leq 1-x$

Et on a: $\frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0$ car $0 \leq x$

Donc : $\frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0$

Donc: $\int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx \geq 0$

Donc: $u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc: (u_n) est croissante

2) Montrons que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a : $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^n \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq x^n + 1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^n+1} \leq 1$

Donc: $\int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n+1} dx \leq \int_0^1 1 dx$

Donc: $\frac{1}{2}[x]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n+1} dx \leq [x]_0^1$

Donc : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

II) LA VALEUR MOYENNE ET THEOREME DE LA MEDIANE

Théorème et définition :

si f est une fonction continues sur un intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ et $a \leq b$ alors il existe au moins un réel c dans [a ; b].

Tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ S'appelle La valeur moyenne de f sur [a ; b]

Preuve : On a : f est continue sur $[a, b]$
donc $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $m \leq f(x) \leq M$
en passant à l'intégrale :

$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$

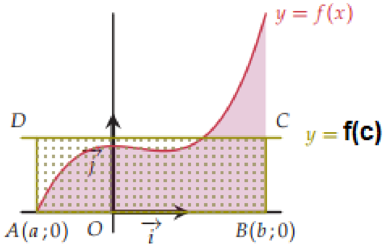
d'où : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

Finalement : $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$

Donc et d'après le T.V.I Il existe au moins un élément c de $]a, b[$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Interprétation géométrique :

: Dans le cas où f est positive et continue sur [a ; b], la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle [a ; b]. et L'aire du rectangle ABCD est égale, en u.a., à l'aire du domaine coloré car d'après la définition : $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$



Exemple : on considére la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Déterminer La valeur moyenne de f sur $[0;\ln 2]$

Solution : La valeur moyenne de f sur $[0;\ln 2]$

Est : $f(c)=\frac{1}{\ln 2-0}\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx=\frac{1}{\ln 2-0}\int_0^{\ln 2}\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}dx$

$=\frac{1}{\ln 2}\left[-\frac{1}{e^x+1}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3\ln 2}$

III)TECHNIQUES DE CALCULS D'UNE INTEGRALE.

1) L'utilisation directe des fonctions primitives :

1-1Rappelle

Tableau des fonctions primitives usuelles.

La fonction	Sa fonction primitive
$\alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R})$	$\alpha x+c$
$x^n \quad (n\in\mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$
$x^r \quad (r\in\mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+c$
$sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}cos(ax+b)+c$
$cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}sin(ax+b)+c$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a\times arctan(x)+c$

Opérations sur les fonctions primitives.

Les seules opérations sur les fonctions primitives sont : la somme et le produit par un réel

La fonction	Sa fonction primitive
$u'+v'$	$u+v+C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u+C^{te}$
$u'u^n\ (n\in\mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}+C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}+C^{te}$
$u'\sqrt[n]{u}\ \ (n\in\mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{u^{n+1}}+C^{te}$
$u'u^r\ (r\in\mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}+C^{te}$
$u'\times v'ou$	$vou+C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$arctan(u)+C$

La ligne en couleur gaune est une généralisation des 4 lignes précédentes.

1-2 Exemples : Calculer les intégrales suivantes :

1) $B=\int_1^e\frac{(\ln x)^3}{x}dx$ 2) $C=\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}dx$

Solution : 1) $B=\int_1^e\frac{(\ln x)^3}{x}dx=\int_1^e(\ln x)'(\ln x)^3dx$

$=\left[\frac{(\ln x)^4}{4}\right]_1^e=\frac{(\ln e)^4}{4}-\frac{(\ln 1)^4}{4}=\frac{1}{4}$

2) $C=\int_0^{\sqrt3}2x\sqrt{x^2+1}dx=\int_0^{\sqrt3}(x^2+1)(x^2+1)^{\frac12}dx$

$=\left[\frac{(x^2+1)^{1+\frac12}}{1+\frac12}\right]_1^{\sqrt3}=\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}\right]_1^{\sqrt3}=\frac{2}{3}(2-1)=\frac{2}{3}$

2)Intégration par partie :

2-1 Introduction :

Considérons l'intégrale $I=\int_1^e f(x)dx$

On ne peut pas trouver une fonction primitive usuelle de la fonction :$x\mapsto x\,ln(x)$ donc on ne peut pas calculer I en se basant directement sur le tableau des fonctions usuelles.

Preuve : (d'une propriété)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continue sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I.

On sait que $(\forall x\in I)$:

$((u\,.\,v)'(x)=u'(x).\,v(x)+v'(x).\,u(x)$

Par suite :

$(\forall x\in I)(u'(x).\,v(x)=(u\,.\,v)'(x)-v'(x).\,u(x)$

En passant à l'intégrale :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx=\int_a^b(uv)'(x)dx-\int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Or $u.\,v$ est une fonction primitive de $(u.\,v)'$ donc :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Cette égalité porte le nom d'une intégration par partie

2-2**Propriété :** Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continue sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)dx$$

2-3 Exemples :
Calculer l' intégrale suivante :

1) $I=\int_0^{\pi} x\sin x dx$ 2) $J=\int_0^{\ln 2} xe^x dx$

3) $K=\int_1^e \ln x dx$

Solution :1) $I=\int_0^{\pi} x\sin x dx$

On pose : $u'(x)=\sin x$ et $v(x)=x$

Donc $u(x)=-\cos x$ et $v'(x)=1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0;\pi]$ et u' et v' sont continue sur $[0;\pi]$

donc: $I=[-x\cos x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos x dx=[-x\cos x]_0^{\pi}-[-\sin x]_0^{\pi}=\pi$

2) $J=\int_0^{\ln 2} xe^x dx$

On pose : $u'(x)=e^x$ et $v(x)=x$

Donc $u(x)=e^x$ et $v'(x)=1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0;\ln 2]$ et u' et v' sont continue sur $[0;\ln 2]$

Donc : $J=\left[xe^x\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}1e^x dx=\ln 2e^{\ln 2}-\left[e^x\right]_0^{\ln 2}$

$J=2\ln 2-\left(e^{\ln 2}-1\right)=2\ln 2-(2-1)=2\ln 2-1$

3) $K=\int_1^e \ln x dx$ on a $K=\int_1^e \ln x dx=\int_1^e 1\times\ln x dx$

On pose : $u'(x)=1$ et $v(x)=\ln x$

Donc : $u(x)=x$ et $v'(x)=1/x$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[1;e]$ et u' et v' sont continue sur $[1;e]$

Donc : $K=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx=e\ln e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx$

$K=e-\int_1^e 1dx=e-[x]_1^e=e-e+1=1$

Remarque :
Pour le choix des fonctions on utilise $L.\ P.\ E.\ T$
L: logarithme P: polynôme E: exponentielle
T: fonctions trigonométrique

Exercice7 : En utilisant une intégration par partie calculer :1) $I=\int_0^1 xe^{2x}dx$ 2) $J=\int_1^{e^3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

3) $K=\int_0^1 x\sqrt{e^x}dx$ 4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$

5) $M=\int_1^e (x\ln x)dx$ 6) $N=\int_1^e \cos(\ln x)dx$

Solution :

1) $I=\int_0^1 xe^{2x}dx$ la démarche est la même

$$I=\int_0^1 xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$$

$$I=\int_1^{e^3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_1^{e^3}x^{-\frac{2}{3}}\ln x dx$$

$$=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-\int_1^{e^3}3x^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}dx=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-3\int_1^{e^3}x^{-\frac{2}{3}}dx$$

$$=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-9\left[x^{\frac{1}{3}}\right]_1^{e^3}=9$$

Exercice8 : En utilisant une intégration par partie calculer : $J=\int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$

$K=\int_0^1 \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

$M=\int_1^e x(1-\ln x)dx$ $N=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$

$R=\int_1^e x\ln x dx$ $Q=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx$

Exercice9 : On pose : $I_0=\int_0^1\sqrt{x+3}dx$

$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}dx$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$

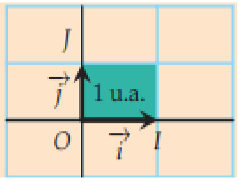
b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

V) INTEGRALE ET SURFACE.

Dans tout ce qui va suivre : Cf est la courbe représentative de la fonction f sur $[a, b]$ dans un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) DÉFINITION(unité d'aire)

On note I et J les points tels que : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ = et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$



L'unité d'aire, que l'on note u.a., est l'aire du rectangle dont O, I et J forment trois sommets.

2) Activités :

Activité 1: $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 1cm$

Soit f définie sur $[1;3]$ par : $f(x) = 2x+1$

1)verifier que f est continue et positif sur $[1;3]$

2)tracer Cf la courbe représentative de la fonction f sur $[1;3]$

3) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : x = 1 et x = 3

4)calculer l'intégrale : $I = \int_1^3 f(x)\,dx$

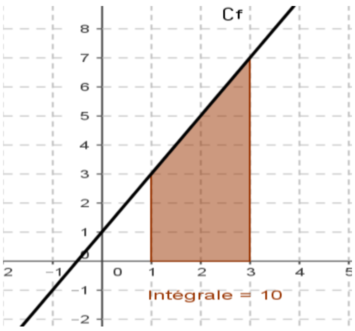
Que peut-on dire ?

Solution :1)f est une fonction polynôme donc continue sur $[1;3]$

$x \in [1;3] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 3 \leq 2x+1 \leq 7$

Donc :f est continue et positif sur $[1;3]$

2)



3) Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est

$A(\Delta_f) = 2\times 3 + \frac{4\times 2}{2} = 2\times 3c^2m + \frac{4\times 2}{2}c^2m = 10c^2m$

4) $I = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (2x+1)dx = \left[x^2+x\right]_1^3$

$I = (3^2+3)-(1^2+1) = 12-2 = 10$

5)on remarque que : $A(\Delta_f) = \int_1^3 f(x)\,dx.ua$

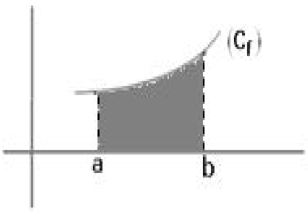
Avec : $u.a = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\| = 1\times 1 = 1$

Proposition1 :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] et Cf la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$

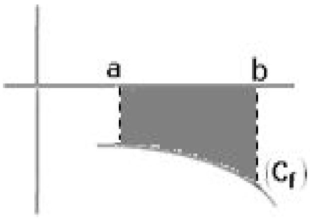
L'intégrale de a à b de f est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b.

$A(\Delta_f) = \int_a^b f(x)\,dx.ua$



Remarque : si f une fonction continue et négatif sur un intervalle [a ; b]

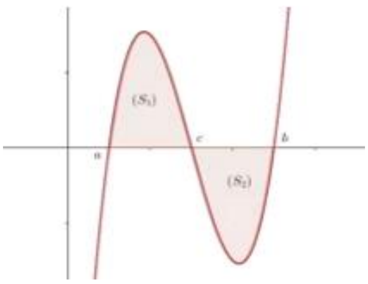
$A(\Delta_f) = -\int_a^b f(x)\,dx \ \ ua$



Proposition2 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équation : x = a et x = b.

est : $A(\Delta_f) = \int_a^b |f(x)|dx \ \ ua$



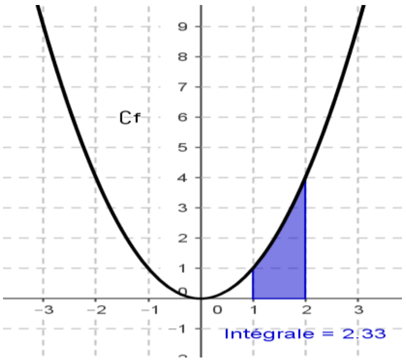
Preuve : Il suffit de déterminer les racines de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ et d'appliquer les propriétés précédentes et la relation de Chasles.

Exemple1 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et Soit f définit par : $f(x) = x^2$

1)tracer C_f la courbe représentative de f
2) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 2$

Solution :1)



2) f est continue et positif sur $[1;3]$ on a donc :

$$A = \int_1^2 |f(x)|dx = \int_1^2 |x^2|dx = \int_1^2 x^2 dx$$

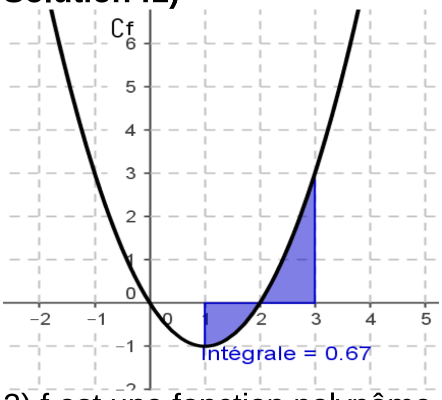
$$A = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}\times 2^3 - \frac{1}{3}\times 1^3 = \frac{7}{3}\times 2cm\times 2cm = \frac{28}{3}c^2m$$

Exemple2 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthogonale avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 3cm$

Soit f définit par : $f(x) = x^2 - 2x$

1)tracer Cf la courbe représentative de f
2) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 3$

Solution :1)



2) f est une fonction polynôme donc continue sur $[1;3]$ donc : $A = \int_1^3 |f(x)|dx = \int_1^3 |x^2 - 2x|dx$

Etudions le signe de : $x^2 - 2x$ dans $[1;3]$

$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x^2-2x	$+$	0	$-$	0	$+$

$$A = \int_1^3 |x^2 - 2x|dx = \int_1^2 |x^2 - 2x|dx + \int_2^3 |x^2 - 2x|dx$$

$$A = \int_1^2 -(x^2 - 2x)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)dx$$

$$A = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_2^3 = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_2^3$$

$$= -\frac{1}{3}\times 2^3 + 2^2 + \frac{1}{3}\times 1^3 - 1^2 + \frac{1}{3}\times 3^3 - 3^2 - \frac{1}{3}\times 2^3 + 2^2$$

$$= -\frac{2}{3}\times 2^3 + 8 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{27}{3} - 9 = -\frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{27}{3} - 2$$

$$A = 2\times 2cm\times 3cm = 12c^2m$$

Exercice10 :

$(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit f définit par : $f(x) = 1 - e^x$

Calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : $x = \ln 2$ et $x = \ln 4$

Solution : il suffit de calculer : $I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)|dx$

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)|dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1 - e^x|dx$$

On sait que : $\ln 2 \le x \le \ln 4$ donc : $e^{\ln 2} \le e^x \le e^{\ln 4}$

Donc : $2 \le e^x \le 4$ donc $e^x > 1$ par suite: $1 - e^x < 0$

Donc:

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1 - e^x|dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} -(1 - e^x)dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^x - 1)dx$$

$$I = \left[e^x - x\right]_{\ln 2}^{\ln 4} = \left(e^{\ln 4} - \ln 4\right) - \left(e^{\ln 2} - \ln 2\right)$$

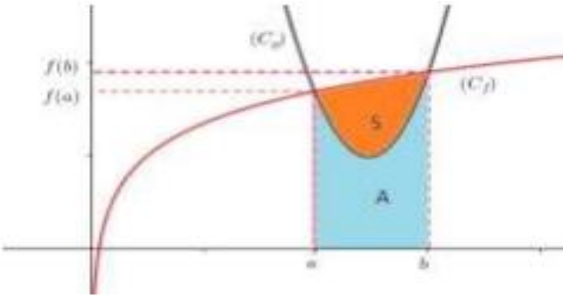
$$I = (4 - 2\ln 2) - (2 - \ln 2) = 4 - 2\ln 2 - 2 + \ln 2 = 2 - \ln 2$$

Donc : $A = (2 - \ln 2)\times 2cm\times 2cm = 4(2 - \ln 2)c^2m$

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et soit S la surface du domaine limité par (C_f) ; (C_g) et les droites $x = a$; $x = b$ on a :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \text{ Ua}$$

Preuve :



Il suffit d'étudier les cas :
Par exemple si $f \geq 0$ et $g \geq 0$ et $f \geq g$ sur $[a, b]$

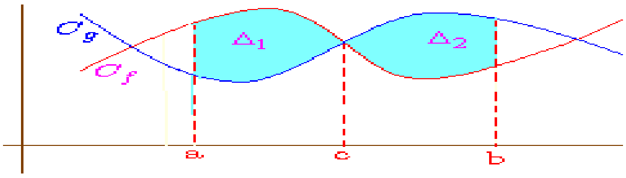
On aura : $S = \int_a^b f(x)dx - A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Et de la même façon on étudie les autres cas.

Remarques :

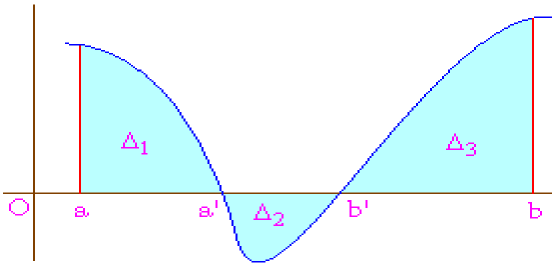
a) Si on a par exemple :



$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

$$S = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

b) Si on a par exemple :



$$A(\Delta) = \int_a^{a'} f(x)dx + \int_{a'}^{b'} -f(x)dx + \int_{b'}^{b} f(x)dx$$

Exemple : $(o;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit f et g deux fonctions tels que:

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x+1} + e^{-x} \text{ et } g(x) = e^{-x}$$

calculer en cm^2 S la surface du domaine limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x = 0$ et $x = \ln 2$

Solution : il suffit de calculer :

$$I = \int_1^e |f(x) - g(x)|dx$$

$$I = \int_0^{\ln 2} \left|\frac{2e^x}{e^x+1} + e^{-x} - e^{-x}\right|dx = \int_0^{\ln 2} \left|\frac{2e^x}{e^x+1}\right|dx = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x}{e^x+1}dx$$

Car : $\frac{2e^x}{e^x+1} > 0$

Donc: $I = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x}{e^x+1}dx = 2\int_0^{\ln 2} \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx = \left[2\ln|e^x+1|\right]_0^{\ln 2}$

Donc :

$$I = 2\ln|e^{\ln 2}+1| - 2\ln|e^0+1| = 2\ln 3 - 2\ln 2 = 2\ln\frac{3}{2}$$

Donc : $A = 2\ln\frac{3}{2} \times 2cm \times 2cm = 8\ln\frac{3}{2} c^2m$

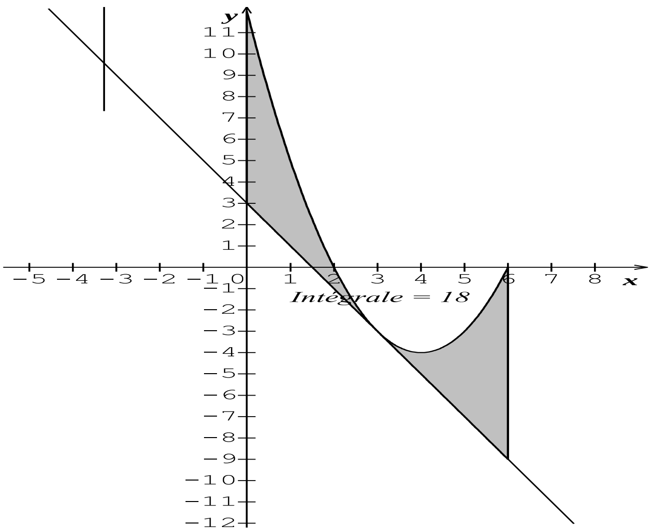
Exercice 11: $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 0.5cm$ et Soit f définit par : $f(x) = x^2 - 8x + 12$ et (D) la tangente à la courbe (C_f) au point $A(3; f(3))$

Calculer A la surface du domaine limité par : (C_f) et les droites : (D) et $x = 1$ et $x = e$

Solution : l'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point $A(3; f(3))$ est : $y = f(3) + f'(3)(x-3)$

$f'(x) = 2x - 8$ et $f'(3) = -2$ et $f(3) = -3$

$(D): y = -2x + 3$



il suffit de calculer :

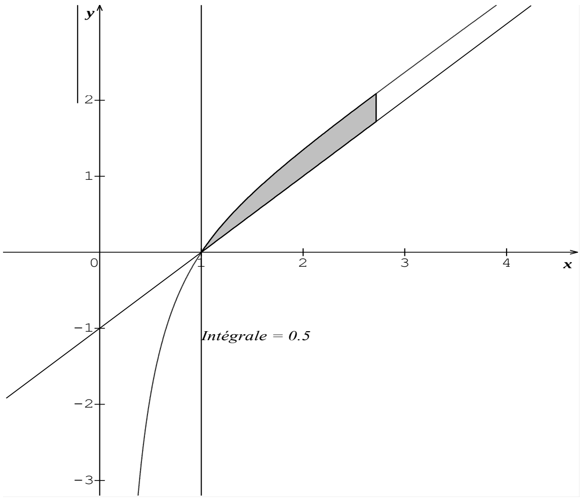
$$I=\int_0^6\left|f(x)-y\right|dx=\int_0^6\left(x^2-6x+9\right)dx=\int_0^6(x+3)'(x+3)^2dx$$

$$I=\left[\frac{(x+3)^3}{3}\right]_0^6=18$$ donc :

$$A=18\times(0.5cm)^2=4.5cm^2$$

Exercice 12: $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\|=1cm$ et Soit f définit par : $f(x)=x-1+\dfrac{\ln x}{x}$

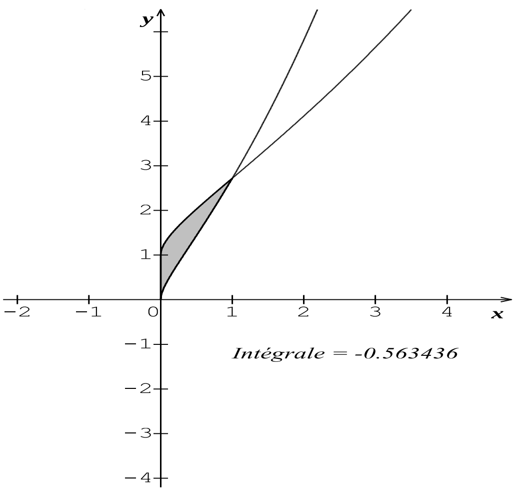
Calculer A la surface du domaine limité par : C_f et les droites : $y=x-1$ et $x=1$ et $x=e$



Exercice13 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé

Soit f et g deux fonctions tels que: $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ et $g(x)=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ Calculer A la surface du domaine limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=1$

Solution :



$$S=\int_0^1\left|f(x)-g(x)\right|dx \text{ Ua}$$

$$S=\int_0^1\left|e^{\sqrt{x}}-\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\right|dx=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\left|1-\sqrt{x}\right|dx$$

On sait que : $0\le x\le 1$ donc : $0\le\sqrt{x}\le 1$ donc :

$0\le 1-\sqrt{x}$ donc : $S==\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)dx$

On utilisant deux intégration l'une par changement de variable et l'autre par partie on trouve :

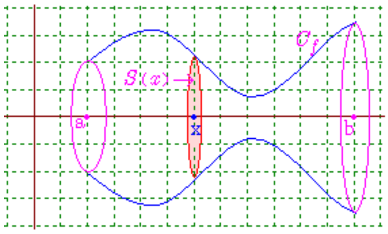
$$S==\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)dx=\left[\left(6\left(\sqrt{x}-1\right)-2x\right)e^{\sqrt{x}}\right]_0^1$$

$S=6-2e$ Ua

VI) INTEGRALE ET CALCUL DES VOLUMES

Volume d'un solide engendré par la rotation d'une courbe .

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$



La rotation de la courbe (C_f) autours de (Ox) engendre un solide (S)

un plan x = fixe coupe le solide (S) suivant un cercle de rayon $f(x)$ donc : $s(x)=\pi(f(x))^2$

Et le volume du solide (S) est : $V=\int_a^b\pi\left(f(x)\right)^2dx$

Propriété : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des abscisses engendre un solide de volume

$V=\int_a^b\pi\left(f(x)\right)^2dx \quad u.v$ (par unité de volume)

Remarque :

si le repere est : $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$: $u.v=\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\|\vec{k}\|$

Exemple 1: $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\|=2cm$

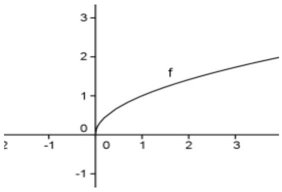
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sqrt{x}$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a=0$ et $b=4$

Solution : La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$ engendre un solide :

$$I = \int_0^4 \pi\left(f(x)\right)^2 dx = \int_0^4 \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_0^4 x dx$$

$$I = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$ et on a :



$$u.v = \left\|\vec{i}\right\|\left\|\vec{j}\right\|\left\|\vec{k}\right\| = 8cm^3$$

Donc le volume est : $V = 8\pi \times 8cm^3 = 64\pi cm^3$

Exemple 2: $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = \frac{2}{3}cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \sqrt{x\left(e^x - 1\right)}$ et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[0;1]$

Solution : on calcul : $\int_0^1 x\left(e^x - 1\right)dx$

$$I = \int_0^1 \pi\left(f(x)\right)^2 dx = \int_0^1 \pi\left(\sqrt{x\left(e^x - 1\right)}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 x\left(e^x - 1\right)dx$$

On utilise une intégration par partie :

On pose : $u'(x) = e^x - 1$ et $v(x) = x$

Donc : $u(x) = e^x - x$ et $v'(x) = 1$

Donc : $\int_0^1 x\left(e^x - 1\right)dx = \left[x\left(e^x - x\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1\left(e^x - x\right)dx$

$$\int_0^1 x\left(e^x - 1\right)dx = e - 1 - \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$\int_0^1 x\left(e^x - 1\right)dx = e - 1 - e + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Donc : $I = \frac{1}{2}\pi$ par suite :

$$V = \frac{1}{2}\pi \times \frac{8}{27}c^3m = \frac{4\pi}{27}c^3m$$

Exercice14: $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{\ln x}$

et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1;e]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien