Lycée Ibn Khaldoun BOUZNIKA	des exercices de préparation à	AGOUZAL
Année scolaire : 2019 – 2020	l'examen national 2020 (4)	2 BPCF

Exercice 1 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{6-U_n}{4-U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 0$$

1) Montrer que : $U_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a - Montrer que :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n-3)(U_n-2)}{4-U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b - En déduire la monotonie de la suite (U_n) et que (U_n) est convergente.

3) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = \frac{2U_n - 6}{U_n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a – Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.

b – Exprimer V_n en fonction de n.

c – En déduire que $U_n = \dfrac{6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d – Calculer $\lim U_n$

Exercice 2 :

1) Calculer $I = \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)}dx$ et $J = \int_0^1 x e^{x^2-1}dx$

2) a – Vérifier que $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} \quad \forall x \in [1,2]$

b – Calculer l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx$

c – En utilisant une intégration par parties calculer :

$$K = \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$$

Exercice 3 :

I - Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 6z + 12 = 0$

II - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A, B et Ω d'affixes respectives $a = 3 + i\sqrt{3}$ et $b = 3 - \sqrt{3} + i(3+\sqrt{3})$ et $\omega = 4$

1) Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe **a**.

2) Soit z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par l'homothétie h de centre Ω et de rapport $(1+\sqrt{3})$.

a – Montrer que : $z' = (1+\sqrt{3})z - 4\sqrt{3}$

b – En déduire que B est l'image du point A par l'homothétie h.

3) Montrer que l'affixe du point C l'image du point A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est :

$$c = -\sqrt{3} + 3i$$

4) Vérifier que : $b = a + c$ en déduire que OABC est un carré.

5) Montrer que $|b| = 2\sqrt{6}$ et $\arg(b) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

En déduire que b^6 est un nombre imaginaire pur.

Problème :

Partie I :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x - 1 + e^{2x}$$

1) a) Calculer: $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

b) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau des variations

2) Montrer que $g(x) \le 0 \quad \forall x \in]-\infty;0]$ et $g(x) \ge 0 \quad \forall x \in [0;+\infty[$ (remarquer que g(0) = 0)

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + e^{2x}$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm)

1) a - Calculer: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b - Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter les résultats géométriquement.

2) a – Montrer que $f'(x) = 2g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que y = 1 est l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

d – En déduire que $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) Tracer la courbe (C_f).

Partie III :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = U_n^2 + e^{2U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

1) Montrer que : $U_n \ge 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a – Montrer que $U_{n+1} \ge 2U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (utiliser Partie II 2) – d)

b – Montrer que la suite (U_n) est croissante.

3) a – Montrer que : $U_n \ge 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b – Calculer $\lim U_n$