Exercices d'applications et de réflexions ***sur les nombres complexes (Partie 2)***

Exercices avec solutions

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre (2BAC PC et SVT)

NOMBRES COMPLEXES(Partie 2)

Exercice1 : Donner la forme exponentielle des complexes suivants :

1) $z_1 = 2+2i$ 2) $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ 3) $z_1 \times z_2$

4) $\frac{z_1}{z_2}$ 5) $(z_2)^{12}$

Solution :1) $z_1 = 2+2i$ $|z_1| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Donc : $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ $|z_2| = \sqrt{(1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

$$1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Donc : $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Donc : $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3) $z_1 \times z_2$

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

4) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}-\left(-i\frac{\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

5) $$(z_2)^{12} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{12} = 2e^{-i12\frac{\pi}{3}} = 2e^{-4i\pi}$$

Exercice2 :en utilisant la Formule de Moivre

1)montrer que : $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

Et que : $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \forall\theta\in\mathbb{R}$

2)montrer que : $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

Et que : $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \quad \forall\theta\in\mathbb{R}$

3)montrer que : $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

Solutions :1)d'après Moivre on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

Et on a : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta$

Donc : $\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

Donc : $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$

2) d'après Moivre on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3(\cos\theta)^2 i\sin\theta + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)$$

Donc :

$$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

Donc : $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

Et : $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)$$

Donc :

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

Et $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\left(1-\sin^2\theta\right)\sin\theta - \sin^3\theta$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

3)montrons que : $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$?

3) d'après Moivre on a :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos^4\theta + 4(\cos\theta)^3 i\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta$

$-4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta$

Donc : $\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$

Et $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

Donc :

$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\left(1-\cos^2\theta\right) + \left(1-\cos^2\theta\right)^2$

Finalement en a donc :

$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

Exercice3 : Linéariser : $\cos^4\theta$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
triangle de Pascal

Solution : On a :

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 6ab^3 + b^4$

Donc : $\cos^4\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4$

$= \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \left(e^{4i\theta} + 3e^{3i\theta}e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta}e^{-2i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$

$= \dfrac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + 3e^{2i\theta} + 6 + 3e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$

$= \dfrac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 3\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right) + 6\right)$

$= \dfrac{1}{16}\left(2\cos 4\theta + 3\times 2\cos 2\theta + 6\right)$

Car $e^{ni\theta} + e^{-ni\theta} = 2\cos n\theta$

Donc : $\cos^4\theta = = \dfrac{1}{8}\left(\cos 4\theta + 3\cos 2\theta + 3\right)$

Donc : $\cos^4\theta = = \dfrac{1}{8}\cos 4\theta + \dfrac{3}{8}\cos 2\theta + \dfrac{3}{8}$

Exercice4 :1) Montrer que $(\forall(\alpha, \beta)) \in \mathbb{R}^2$

$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}\right)$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

2)on pose : $u = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $v = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$ et $u_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$

Et $u_2 = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$

Déterminer le module et l'argument du nombre complexes : $u+v$; u_1 et u_2

Solution :1) à vérifier

2)a) $u + v = 3e^{i\frac{\pi}{5}} + 3e^{i\frac{\pi}{7}} = 3\left(e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{\pi}{7}}\right)$

$u + v = 3e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{14}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{14}\right)}\right)$

$u + v = 3e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{35}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{35}\right)}\right)$

$u + v = 6\cos\left(\dfrac{\pi}{35}\right)e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)}$ et puisque

$6\cos\left(\dfrac{\pi}{35}\right) > 0$ alors : $|u + v| = 6\cos\left(\dfrac{\pi}{35}\right)$

Et $\arg(u+v) \equiv \dfrac{6\pi}{35}[2\pi]$

b) $u_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} + \left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2$

$u_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) = 2\cos\dfrac{\pi}{6} \times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

Car : d'après Euler $e^{ni\theta}+e^{-ni\theta}=2\cos n\theta$

alors : $u_1=\sqrt{3}\times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ $|u_1|=\sqrt{3}$

Et $\arg(u_1)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

c) $u_2=1-e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)}-\left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2$

$$u_2=e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)}-e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)=-2i\sin\frac{\pi}{6}\times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Car : d'après Euler $e^{ni\theta}-e^{-ni\theta}=2i\,\mathrm{sins}\,n\theta$

alors : $u_2=-i\times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ $|u_2|=1$

Et $\arg(u_2)\equiv-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc : $\arg(u_2)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Et $\arg(u_2)\equiv-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc : $\arg(u_2)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Exercice5 : 1) en utilisant la formule d'Euler

Montrer que : $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ $\theta\in\mathbb{R}$

2) Montrer que : $\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$

3) Montrer que : $\sin^3\theta=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$ $\theta\in\mathbb{R}$

4) Montrer que : $\sin^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$

5) Linéariser : a) $\sin^5\theta$ b) $\cos^2\theta\sin^3\theta$

Solution : 1)On a : $\cos^2\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{2i\theta}+2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-2i\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2\right)=\frac{1}{4}(2\cos 2\theta+2)=\frac{\cos 2\theta+1}{2}$$

2) $\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$?

$$\cos^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3+3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2+\left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{8}\left(e^{i\theta 3}+3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta}+e^{-i3\theta}\right)$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta 3}+e^{-i3\theta}\right)+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)$$

On a : $e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)$ donc :

$$=\frac{1}{8}(2\cos 3\theta+3\times 2\cos\theta)=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

3) $\sin^3\theta=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$?

On a : $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Donc :

$$\sin^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3=-\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3-3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2-\left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$\sin^3\theta=-\frac{1}{8i}\left(e^{i\theta 3}-3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta}-e^{-i3\theta}\right)$$

$$\sin^3\theta=-\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta 3}-e^{-i3\theta}\right)-3\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$$

Et on a : $2i\sin n\theta=e^{in\theta}-e^{-in\theta}$ donc :

$$=-\frac{1}{8i}(2i\sin 3\theta-3\times 2i\sin\theta)=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$$

4) $\sin^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$?

On a : $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ et $\theta\in\mathbb{R}$

$$\sin^4\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(\left(e^{i\theta}\right)^4-4\left(e^{i\theta}\right)^3\cdot e^{-i\theta}+6\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2-4\left(e^{i\theta}\right)^1\left(e^{-i\theta}\right)^3+\left(e^{-i\theta}\right)^4\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}-4e^{3i\theta}\cdot e^{-i\theta}+6e^{2i\theta}\cdot e^{-2i\theta}-4e^{i\theta}\cdot e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}-4e^{2i\theta}+6-4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(-4\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+6+\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}\right)\right)$$

On a : $e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)$ donc :

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}(-4\times 2\cos 2\theta+6+2\cos 4\theta)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{8}(-4\cos 2\theta+3+\cos 4\theta)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$$

5)a)On a :

$$(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-106a^2b^3+5ab^4-b^5$$

Donc : $\sin^5\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^5$

$=\left(\frac{1}{2i}\right)^5\left(e^{5i\theta}-5e^{4i\theta}e^{-i\theta}+10e^{3i\theta}e^{-2i\theta}-10e^{2i\theta}e^{-3i\theta}+5e^{i\theta}e^{-4i\theta}-e^{-5i\theta}\right)$

$=-\frac{1}{32i}\left(e^{5i\theta}-5e^{3i\theta}+10e^{i\theta}-10e^{-i\theta}+5e^{-3i\theta}-e^{-5i\theta}\right)$

$=-\frac{1}{32i}\left(e^{5i\theta}-e^{-5i\theta}-5\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\right)+10\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$

$=-\frac{1}{16}(\sin 5\theta-5\sin 3\theta+10\sin\theta)$

Car $e^{ni\theta}-e^{-ni\theta}=2i\sin n\theta$

Donc : $\sin^5\vartheta==-\frac{1}{16}\sin 5\theta+\frac{5}{16}\sin 3\theta-\frac{5}{8}\sin\theta$

5)b) $\cos^2\theta\sin^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2\times\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$

$=\frac{1}{-32i}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2\times\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3$

$=\frac{1}{-32i}\left(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}\right)^2\times\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$

$=\frac{1}{-32i}\left(e^{4i\theta}-2+e^{-4i\theta}\right)\times\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$

$=\frac{1}{-32i}\left(e^{5i\theta}-e^{-5i\theta}-\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\right)-2\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$

$=\frac{1}{-32i}(2i\sin 5\theta-2i\sin 3\theta-2\times 2i\sin\theta)$

$=-\frac{1}{16}(\sin 5\theta-\sin 3\theta-2\sin\theta)$

Exercice6 :Résoudre dans ℂ les équations suivantes : 1) $(E): z^2-z+2=0$

2) $(E): z^2-z-2=0$

3) $(E): z^2-2z+1=0$

Solution :1) $(E): z^2-z+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(2)=-7=\left(i\sqrt{7}\right)^2$

Donc les solutions sont : $z_1=\frac{1+i\sqrt{7}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}$

Et $z_2=\overline{z_1}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}$

Donc : $S=\left\{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2};\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$

2) $(E): z^2-z-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(-2)=9=(3)^2$

Donc les solutions sont : $z_1=\frac{1-3}{2}=-1$ e

$z_2=\frac{1+3}{2}=2$

Donc : $S=\{-1;2\}$

3) $(E): z^2-2z+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4=0$

L'équation (E) admet comme solution le complexe $z=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2}=1$ donc : $S=\{1\}$

Exercice7 :soit $z\in\mathbb{C}$ on pose : $P(z)=z^2-2z+2$

1)calculer : $P(1-i)$

2)en déduire dans ℂ la résolution de l'équations $P(z)=0$

Solution :1)

$P(1-i)=(1-i)^2-2(1-i)+2=-2i-2+2i+2=0$

Donc $z_1=1-i$ est une racine de de l'équations $P(z)=0$ et on a : $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ donc :

$1-i+z_2=-\frac{-2}{1}$ donc $z_2=2+i-1=1+i$

Par suite : $S=\{1-i;1+i\}$

Exercice8 :Résoudre dans ℂ les équations suivantes : 1) $\left(z^2+9\right)\left(z^2-4\right)=0$

2) $z^2-6z+13=0$

3) $(4\cos\theta)z^2-2(\cos 2\theta)z+i\sin\theta=0$ avec : $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

Solution :

1) $\left(z^2+9\right)\left(z^2-4\right)=0$ ssi $z^2-4=0$ ou $z^2+9=0$

Ssi $z^2=4$ ou $z^2=-9$

Ssi $z=\sqrt{4}$ ou $z=-\sqrt{4}$ ou $z=\sqrt{9}i$ ou $z=-\sqrt{9}i$

Ssi : $z=2$ ou $z=-2$ ou $z=3i$ ou $z=-3i$

Donc : $S=\{-3i;3i;-2;2\}$

2) $z^2-6z+13=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4(13)=36-52=(4i)^2$

Donc les solutions sont : $z_1=\dfrac{6+4i}{2}=3+2i$

Et $z_2=\overline{z_1}=3-2i$ donc : $S=\{3-2i;3+2i\}$

3) $(4\cos\theta)z^2-2(\cos 2\theta)z+i\sin\theta=0$

$\Delta=(2(\cos 2\theta))^2-4(4\cos\theta)(\sin\theta)i$

$\Delta=4\cos^2 2\theta-16i\cos\theta\sin\theta$

$\Delta=4(\cos^2 2\theta-4i\cos\theta\sin\theta)$

On a : $2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$ et $\cos^2 2\theta=1-\sin^2 2\theta$

Donc : $\Delta=4(1^2+i^2\times\sin^2 2\theta-2i\sin 2\theta)$

Donc : $\Delta=(2(1-i\sin 2\theta))^2$

les solutions sont : $z_1=\dfrac{2(\cos 2\theta)+2(1-i\sin 2\theta)}{2(4\cos\theta)}$

et : $z_2=\dfrac{2(\cos 2\theta)-2(1-i\sin 2\theta)}{2(4\cos\theta)}$

les solutions sont : $z_1=\dfrac{\cos 2\theta+1-i\sin 2\theta}{4\cos\theta}$

et : $z_2=\dfrac{\cos 2\theta-1+i\sin 2\theta}{4\cos\theta}$

et on a : $\cos 2\theta-1=-2\sin^2\theta$ et $\cos 2\theta+1=2\cos^2\theta$

donc : $z_1=\dfrac{2\cos^2\theta-i2\sin\theta\cos\theta}{4\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{2}$

et $z_2=\dfrac{-\sin^2\theta+i\sin\theta\cos\theta}{2\cos\theta}$

Exercice9 :1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$\boldsymbol{z}^2-8\boldsymbol{z}+17=0$

2) Soit $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}^3+(-8+\boldsymbol{i})\boldsymbol{z}^2+(17-8\boldsymbol{i})\boldsymbol{z}+17\boldsymbol{i}$

a) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet un imaginaire pur unique comme solution.

b)déterminer les réels $\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c}$ tels que :

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i})(\boldsymbol{a}\boldsymbol{z}^2+\boldsymbol{b}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{c})$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})=0$

Solution :1) $\boldsymbol{z}^2-8\boldsymbol{z}+17=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4(17)=64-68=(2i)^2$

les solutions sont : $z_1=\dfrac{8+2i}{2}=4+i$ et $z_2=\overline{z_1}=4-i$

donc : $S=\{4-i;4+i\}$

2)a)soit $\boldsymbol{z}_0=\boldsymbol{b}\boldsymbol{i}$ une solution imaginaire pur de l'équation $P(z)=0$ donc :

$\boldsymbol{z}_0^{\,3}+(-8+\boldsymbol{i})\boldsymbol{z}_0^{\,2}+(17-8\boldsymbol{i})\boldsymbol{z}_0+17\boldsymbol{i}=0$

Donc : $(\boldsymbol{bi})^3+(-8+\boldsymbol{i})(\boldsymbol{bi})^2+(17-8\boldsymbol{i})(\boldsymbol{bi})+17\boldsymbol{i}=0$

Donc : $-\boldsymbol{i}\boldsymbol{b}^3-(-8+\boldsymbol{i})\boldsymbol{b}^2+17\boldsymbol{bi}+8\boldsymbol{b}+17\boldsymbol{i}=0$

Donc : $-\boldsymbol{i}\boldsymbol{b}^3+8\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{i}\boldsymbol{b}^2+17\boldsymbol{bi}+8\boldsymbol{b}+17\boldsymbol{i}=0$

Donc : $8\boldsymbol{b}^2+8\boldsymbol{b}+\boldsymbol{i}(-\boldsymbol{b}^3-\boldsymbol{b}^2+17\boldsymbol{b}+17)=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}8\boldsymbol{b}^2+8\boldsymbol{b}=0\\-\boldsymbol{b}^3-\boldsymbol{b}^2+17\boldsymbol{b}+17=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}+1)=0\\-\boldsymbol{b}^3-\boldsymbol{b}^2+17\boldsymbol{b}+17=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{b}=0\,\boldsymbol{ou}\,\boldsymbol{b}=-1\\-\boldsymbol{b}^3-\boldsymbol{b}^2+17\boldsymbol{b}+17=0\end{cases}$

$\boldsymbol{b}=0$ ne vérifies pas $-\boldsymbol{b}^3-\boldsymbol{b}^2+17\boldsymbol{b}+17=0$

Car $-0^3-0^2+170+17\neq0$

$\boldsymbol{b}=-1$ vérifies $-\boldsymbol{b}^3-\boldsymbol{b}^2+17\boldsymbol{b}+17=0$ car :

$-(-1)^3-(-1)^2+17(-1)+17=0$

Donc : $\boldsymbol{b}=-1$ donc : $\boldsymbol{z}_0=(-1)\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}$ est l'unique solution imaginaire pur de l'équation $P(z)=0$

2)b) $(z+i)(az^2+bz+c)=az^3+bz^2+cz+aiz^2+biz+ci$

$P(z)=az^3+(b+ai)z^2+(c+bi)z+ci$

Et on a : $P(z)=z^3+(-8+i)z^2+\ (17-8i)z+17i$

Donc : $\begin{cases} a=1 \\ b+ai=-8+i \\ c+bi=17-8i \\ ci=17i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c-8i=17-8i \\ c=17 \end{cases}$

donc : $a=1$ et $b=-8$ et $c=17$

Donc : $P(z)=(z+i)(z^2-8z+17)$

2)c) $P(z)=0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2-8z+17)=0$

$\Leftrightarrow z^2-8z+17=0$ ou $z+i=0$

$\Leftrightarrow z_1=4+i$ ou $z_2=4-i$ ou $z_0=-i$

Donc : $S=\{4-i;4+i;-i\}$

Exercice10 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2Z^2\text{-}2Z+5=0$ 2) $3Z^3\text{-}3Z^2+2Z\text{-}2=0$

Solutions :1) $2Z^2\text{-}2Z+5=0$ $\Delta=-36$

Donc : $z_1=\dfrac{2-i\sqrt{36}}{4}$; $z_2=\dfrac{2+i\sqrt{36}}{4}$

Donc : $\boxed{S=\left\{\dfrac{1-3i}{2};\dfrac{1+3i}{2}\right\}}$

2) $3Z^3\text{-}3Z^2+2Z\text{-}2=0$

On remarque que 2 est solution

donc : $3Z^3\text{-}3Z^2+2Z\text{-}2$ est divisible par **:** $z-1$

La division euclidienne de $3Z^3\text{-}3Z^2+2Z\text{-}2$ par :

$z-1$ nous donne : $3Z^3\text{-}3Z^2+2Z\text{-}2=(Z\text{-}1)(3Z^2+2)$

$3Z^2+2=0 \Leftrightarrow Z^2=-\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow Z=i\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ou $Z=i\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Donc les solutions de : $3Z^3\text{-}3Z^2+2Z\text{-}2=0$

sont : $Z=1$ ou $Z=i\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ou $Z=-i\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Donc : $\boxed{S=\left\{1;i\sqrt{\dfrac{2}{3}};-i\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right\}}$

Exercice11: soit : $z=-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1)Donner la forme exponentielle et la forme algébrique du nombre complexes z

2)en déduire : $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$

Solution :1) $z=e^{-i\pi}\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\pi}=e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

$z=-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=-\dfrac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{4}=-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

$\boxed{z=\dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}+i\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}}$

2) $\sin\dfrac{-11\pi}{12}=\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$ et $\cos\dfrac{-11\pi}{12}=-\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$

Donc : $\boxed{\cos\dfrac{11\pi}{12}=-\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}}$ et $\boxed{\sin\dfrac{11\pi}{12}=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}}$

Exercice12 : Dans le plan complexe $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points : A ;B ;C d'affixe respectivement $z_A=3+5i$; $z_B=3-5i$; $z_C=7+3i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $aff(\vec{u})=4-2i$

1)montrer que : $z'=z+4-2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ **)**

2) verifier que le Point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3) déterminer $z_{B'}$ l'affixe de B' l'image de B par la translation $t_{\vec{u}}$

Solution:1) $T(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

$\Leftrightarrow z_{M'}-z_M=z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z_{M'}=z_M+z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z'=z+z_{\vec{u}}$

$\Leftrightarrow z'=z+4-2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ **)**

2)on a **:** $z_A = 3+5i$

Donc : $z' = 3+5i+4-2i$

Donc : $z' = 7+3i = z_C$

Donc: le point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3)on a : $z_B = 3-5i$ Donc : $z' = 3-5i+4-2i$

$\Leftrightarrow z' = 7-7i = z_{B'}$

Donc l'affixe de B' l'image de B par la translation $t_{\vec{u}}$ est $z_{B'}=7-7i$

Exercice13 : Dans le plan complexe $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le points : A d'affixe $z_A = 3+5i$ et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par l'homothétie de centre $\Omega(3;-2)$) et de Rapport $k=4$

1)montrer que : $z'=4z-9+6i$ (l'écriture complexe de l'homothétie $h(\Omega,k)$**)**

2) déterminer $z_{A'}$ l'affixe de A' l'image de A par l'homothétie $h(\Omega,k)$

Solution:1) $h_{(\Omega;k)}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z_{M'}=kz_M+z_\Omega(1-k)$

$\Leftrightarrow z'=4z+z_\Omega(1-4) \Leftrightarrow z'=4z-3(3-2i)$

$\Leftrightarrow z'=4z-9+6i$

2) on a : $z_A = 3+5i$ et $z'=4z-9+6i$

Donc : $z'=4(3+5i)-9+6i$

Donc $z_{A'}=3+26i$

Exercice14 : Dans le plan complexe direct $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points : A ;B d'affixe respectivement $z_A = 7+2i$; $z_B = 4+8i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1)montrer que : $z'=iz+4i+12$ (l'écriture complexe de la rotation r **)**

2) montrer que l'affixe du point C l'image de A par la rotation r est $z_C = 10+11i$

Solution : $r(M)=M' \Leftrightarrow z_{M'}=e^{i\alpha}(z_M-z_B)+z_B$

$\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-4-8i)+4+8i$

$\Leftrightarrow z'=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z-4-8i)+z$

$\Leftrightarrow z'=i(z-4-8i)+4+8i$

$\Leftrightarrow z'=iz-4i+8+4+8i$

$\Leftrightarrow z'=iz+4i+12$

2)on a : $z_A = 7+2i$

Donc : $z'=i(7+2i)+4i+12$

Donc : $z'=7i-2+4i+12=11i+10$ cqfd

Exercice15 :Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω (1+i) et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

Solution : $r(M)=M' \Leftrightarrow z'=e^{i\alpha}(z-z_\Omega)+z_\Omega$

$\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{3\pi}{4}}(z-1-i)+1+i$

$\Leftrightarrow z'=\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)(z-1-i)+1+i$

$\Leftrightarrow z'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z-1-i)+1+i$

$\Leftrightarrow z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z+\sqrt{2}+1+i$

Exercice16: Soit la rotation r de centre **Ω** (i) et transforme O en $O'\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$

Déterminer L'angle de cette rotation

Solution : $r(M)=M' \Leftrightarrow z' = e^{i\alpha}\left(z - z_{\Omega}\right) + z_{\Omega}$

$\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}\left(z - i\right) + i$

Et puisque : $r(O)=O'$ alors : $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i\theta}\left(0-i\right)+i$

$\Leftrightarrow e^{i\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{0-i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Donc : $\theta \equiv \frac{-\pi}{3}\left[2\pi\right]$

L'angle de cette rotation est $-\frac{\pi}{3}$

Exercice 17: Soit f une transformation plane qui transforme $M(z)$ en M' (z') tel que

$\boldsymbol{z}' = -2\boldsymbol{z} + 3 - 3\boldsymbol{i}$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques

Solution : Soit : $\omega = \frac{b}{1-a}$ on a :Le point Ω(ω) est un point invariant par f: $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3-3i}{3} = 1-i$

D'où: $\begin{cases} z' = -2z + 3 - 3i \\ \omega = -2\omega + 3 - 3i \end{cases}$ en faisant la différence on obtient : $z' - \omega = -2\left(z - \omega\right)$ qui se traduit par

$\overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M}$ Donc :f est l'homothétie de centre Ω(ω= $1-i$) et de Rapport -2

Exercice 18: Dans le plan complexe direct $\left(\boldsymbol{O};\vec{\boldsymbol{i}},\vec{\boldsymbol{j}}\right)$, on considère le point : A ($\boldsymbol{i}$) et **l**a rotation R_0 de centre O (0) et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et soit R_1 **l**a rotation de centre A ($\boldsymbol{i}$) et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Déterminer la nature de la transformation $R_1 \circ R_0$ et ses éléments caractéristiques

Solution : soit un point M $(\boldsymbol{z})$

On pose : $R_0(M)=M'(z')$ **et** $R_1(M')=M''(z'')$

$R_0(M)=M'(z') \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{6}}\left(z - z_O\right) + z_O$

$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z$ Car $z_O = 0$

Et on a : $R_1(M')=M''(z'') \Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z' - z_A\right) + z_A$

$\Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}z - i\right) + i \Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}z + i\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$

$\Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{2}}z + i\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \Leftrightarrow z'' = iz + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

On sait que la composée de deux rotation est une rotation ($\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \neq 2k\pi$)

Déterminons le centre de la rotation : $R_1 \circ R_0$ **?**

Le centre de la rotation est le point invariant :

$\omega = i\omega + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \omega(1-i) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Donc : $\omega = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

On a **:** $\arg i = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

L'angle de la rotation est : $\frac{\pi}{2}$

Exercice 19: soit ABC un triangle isocèle et rectangle on A tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

et soit R **l**a rotation de centre A et qui transforme B en C et soit la translation $T = t_{\overrightarrow{AB}}$

Déterminer : $F_1 = R \circ T$ et $F_2 = T \circ R$

Solution : on considère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ comme repére normé donc : L'angle de la rotation R est : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$

donc : R la rotation de centre A (0) et d'angle $\frac{\pi}{2}$

donc : $R(M)=M'(z')\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z-z_A\right)+z_A$

Donc l'écriture complexe de la rotation R est .

$R(M)=M'(z')\Leftrightarrow z'=iz$

l'écriture complexe de la translation translation $T=t_{\overrightarrow{AB}}$ est: $z''=z+1$

soit un point M (z) : on pose : $F_1(M)=M_1(z_1)$

et $F_2(M)=M_2(z_2)$

on a donc : $z_1=i(z+1)$ et $z_2=iz+1$

on a : pour F_1 **:** $z=i(z+1)\Leftrightarrow(1-i)z=i$

$z=\frac{i}{1-i}=\frac{-1+i}{2}$ et pour F_1 le seul point invariant est $\Omega_1\left(\omega_1=\frac{-1+i}{2}\right)$ et on a :

$z_1=e^{\frac{\pi}{2}i}z+\omega_1\left(1-e^{\frac{\pi}{2}i}\right)$

donc F_1 est la rotation de centre $\Omega_1\left(\omega_1=\frac{-1+i}{2}\right)$

et d'angle : $\frac{\pi}{2}$

De même : pour F_2 le seul point invariant est

$\Omega_2\left(\omega_2=\frac{1+i}{2}\right)$ et on a : $z_2=e^{\frac{\pi}{2}i}z+\omega_2\left(1-e^{\frac{\pi}{2}i}\right)$

donc F_2 est la rotation de centre : $\Omega_2\left(\omega_2=\frac{1+i}{2}\right)$

et d'angle : $\frac{\pi}{2}$

Exercice 20: soit z un nombre complexe non nul

Montrer que : $|z-1|\leq\left||z|-1\right|+|z||\arg z|$

Solution : soit $z\in\mathbb{C}^*$ on a :

$|z-1|=\left|z-|z|+(|z|-1)\right|\leq\left|z-|z|\right|+\left||z|-1\right|$

On pose : $z=\mathrm{R}e^{i\theta}$ avec $\mathrm{R}\succ 0$

On a : $\left|z-|z|\right|=\left|\mathrm{R}e^{i\theta}-R\right|=\mathrm{R}\left|e^{i\theta}-1\right|$

$=\mathrm{R}\left|\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2-e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}\right|=\mathrm{R}\left|e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right|$

Donc : $\left|z-|z|\right|=2\mathrm{R}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$

Or on sait que : $|\sin x|\leq|x|\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $\left|z-|z|\right|\leq|z||\theta|=|z||\arg z|$

Donc : $|z-1|\leq\left||z|-1\right|+|z||\arg z|$

Exercice21 : soit a et b et c des nombres complexes tels que :

$|a|=|b|=|c|=1$ et $a\neq c$ et $b\neq c$

1)Montrer que : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$

2)en déduire que : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)\equiv\frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$

Solution : $\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}}=\left(\frac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{a}}\right)^2\times\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$

On a si : $|z|=1$ alors : $\overline{z}=\frac{1}{z}$ donc :

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}}=\left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2\times\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}=\left(\frac{\frac{b-c}{bc}}{\frac{a-c}{ac}}\right)^2\times\frac{b}{a}$$

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}}=\left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2\times\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}=\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{b}{a}$$

Donc : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$

2)puisque : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$ alors :

$$\arg\left(\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}\right)\equiv 0[\pi]$$

Donc : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2+\arg\left(\frac{a}{b}\right)\equiv 0[\pi]$

Donc : $2\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)\equiv-\arg\left(\frac{a}{b}\right)[\pi]$

$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)\equiv\frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

Exercice22 :soit le nombre complexe $z=e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose : $S=z+z^2+z^4$ et $T=z^3+z^5+z^6$

1)Montrer que les nombres S et T sont conjugués

2) Montrer que : $\operatorname{Im}(S)\succ 0$

3)calculer $S+T$ et $S\times T$

4)en déduire les nombres S et T

Solution : on a : $z=e^{i\frac{2\pi}{7}}$ donc $z^7=1$

1) $\overline{S}=\overline{z}+\overline{z}^2+\overline{z}^4$

On a si : $|z|=1$ alors : $\overline{z}=\frac{1}{z}$ donc :

$\overline{S}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}$ et on a $z^7=1$

Donc : $z^6=\frac{1}{z}$ et $z^5=\frac{1}{z^2}$ et $z^3=\frac{1}{z^4}$

Donc : $\overline{S}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}=z^3+z^5+z^6=T$

Donc : les nombres S et T sont conjugués

2) Montrons que : $\operatorname{Im}(S)\succ 0$?

On a : $S=z+z^2+z^4$ et $z=e^{i\frac{2\pi}{7}}$

Donc $\operatorname{Im}(S)=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$

$$\operatorname{Im}(S)=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)$$

$\operatorname{Im}(S)=\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}$ puisque : $\frac{\pi}{7}\prec\frac{2\pi}{7}\prec\frac{\pi}{2}$

Donc : $\sin\frac{\pi}{7}\prec\sin\frac{2\pi}{7}$ et on a $\sin\frac{4\pi}{7}\succ 0$

Donc : $\operatorname{Im}(S)\succ 0$

3)calculons $S+T$ et $S\times T$?

$$S+T=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$$

$$S+T=\left(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6\right)-1$$

$S+T=\frac{1-z^7}{1-z}-1=-1$ car $z^7=1$

$$S\times T=\left(z+z^2+z^4\right)\left(z^3+z^5+z^6\right)$$

$$S\times T=z^4+z^6+z^7+z^5+z^7+z^8+z^7+z^9+z^{10}$$

$$S\times T=z^4+z^5+z^6+3z^7+z^8+z^9+z^{10}$$

On a $z^7=1$ donc : $z^8=z$ et $z^9=z^2$ et $z^{10}=z^3$

donc : $S\times T=1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+2$

$S\times T=\frac{1-z^7}{1-z}+2=2$ car : $z^7=1$

4)on a $S+T=-1$ et $S\times T=2$ donc S et T sont les solutions de l'équation : $x^2+1x+2=0$

$\Delta = -7 = \left(\sqrt{7}i\right)^2$

En résolvant l'équation on trouve :

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ et $x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$ et on a $\mathrm{Im}(S) \succ 0$

Donc : $S = \frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ et $T = \frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien