Résumé de Cours Limite et continuité

PROF : ATMANI NAJIB 2BAC BIOF: PC et SVT

LIMITE ET CONTINUITE

I)LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT COMPLEMENTS (limite à droite et à gauche et opérations sur les limites)

1)Résultats

Soient P et Q deux fonction polynôme et $x_0 \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ alors :

1) $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ 2) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ si $Q(x_0) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ 4) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$ si $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

6) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ si $x_0 \geq 0$ 7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ 9) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$ 10) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$

11) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Limite de la somme :

lim f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim f+g	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si x tend vers $a+$; $a-$; $+\infty$ ou $-\infty$

Limites des produits :

lim f	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim f x g	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limites des inverses :

lim f	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
lim $\frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Limites des quotients

lim f	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
lim g	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	ℓ	0	$\pm\infty$
lim $\frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	?

2) Limites à droite et à gauche : RAPPELLES

Exemple : (*Limites à droite et à gauche*)

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0 = -1$

Solution :Déterminons $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \succ -1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \prec -1}} f(x)$?

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$

Si : $-1 \prec x \prec 1$: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \succ -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \succ -1}} -\frac{x+1}{x-1} = 0$

Si : $x \prec -1$: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \prec -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \prec -1}} \frac{x+1}{x-1} = 0$

donc : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \succ -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \prec -1}} f(x) = 0$ donc : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$

II) CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE EN UN POINT :

1) Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de centre a. On dit que la fonction f est continue en a si elle admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

2) continuité à droite et à gauche

Définition :1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ où $r > 0$

On dit que la fonction $f$est continue à droite de a si elle admet une limite finie à droite en a et

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$:

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-r;a]$où $r > 0$

On dit que la fonction $f$est continue à gauche de a si elle admet une limite finie à gauche en a et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

3) Prolongement par continuité

Théorème et définition : Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f ; a un réel tel que $a \notin D_f$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ (finie)

La fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = f(x); si...x \neq a \\ f(a) = l \end{cases}$

Est une fonction continue en $\boldsymbol{a}$ et s'appelle un prolongement par continuité de la fonction f en a

III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

1) Continuité sur un intervalle

Définition : Soit f une fonction dont le domaine de définition est D_f, soit $]a, b[$ un intervalle inclus dans Df

1) On dit que f est continue sur l'ouvert $]a, b[$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$
2) On dit que f est continue sur $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et à droite de a
3) On dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b

2) Opérations sur les fonctions continues

Propriétés : 1) Si f et g sont deux fonctions continues en a alors : a) $f+g$ b) $f\times g$ c) $|f|$
Sont des fonctions continues en a
2) Si f et g sont deux fonctions continues en a et $g(a)\neq 0$ alors

a) $\dfrac{1}{g}$ b) $\dfrac{f}{g}$ sont des fonctions continues en a.

3) Si f une fonction continue en a et $f(a)\geq 0$ alors :
$\sqrt{f}$ est continue en a

Remarque : La propriété précédente reste vraie soit à droite de a, à gauche de a ou sur un intervalle I (En tenant compte des conditions)

Propriétés : 1) Tout fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$
2) Les fonctions sin et cos sont continue sur $\mathbb{R}$

3) Continuité de la composition de deux fonctions.

Théorème : Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tels que : $f(I)\subset J$ et x_0 un élément de I.

1) Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0.
2) Si f est continue I et g continue en $f(I)$ alors gof est continue I.

4) Limite de $v o u$

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle pointé de centre x_0 telle $\lim_{x\to x_0} u(x)=l$

si v est continue en l alors $\lim_{x\to x_0}(v\circ u)(x)=v(l)$

IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

Théorème : (Admis)
L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est le segment $[m, M]$ où: $m=\min_{x\in[a;b]} f(x)$ et $M=\max_{x\in[a;b]} f(x)$

Cas particulier :
1) Si f est continue croissante sur $[a, b]$ alors :
$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
2) Si f est continue décroissante sur $[a, b]$ alors :
$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$

2) Image d'un intervalle.

2.1 Théorème général
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque : L'intervalle I et son image $f(I)$ par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme.

2.2 Cas d'une fonction strictement monotone
a) $\boldsymbol{f}$ continue et strictement croissante sur L'intervalle $\boldsymbol{I}$ et $a\in I$ et $b\in I$

$$f([a;b])=[f(a);f(b)] \text{ et } f([a;b[)=\left[f(a);\lim_{\substack{x\to b\\x\prec b}} f(x)\right[$$

$$f(]a;b])=\left]\lim_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x);f(b)\right] \text{ et } f(]a;b[)=\left]\lim_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x);\lim_{\substack{x\to b\\x\prec b}} f(x)\right[$$

b) $\boldsymbol{f}$ continue et strictement décroissante sur L'intervalle $\boldsymbol{I}$ et $a\in I$ et $b\in I$

$$f([a;b])=[f(b);f(a)] \text{ et } f([a;b[)=\left]\lim_{\substack{x\to b\\x\prec b}} f(x);f(a)\right]$$

$$f(]a;b])=\left[f(b);\lim_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x)\right[\text{ et } f(]a;b[)=\left]\lim_{\substack{x\to b\\x\prec b}} f(x);\lim_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x)\right[$$

V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERE – TVI.

1) Cas général

Théorème T.V.I : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ .Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c\in[a, b]$ tel que $f(c)=\lambda$

2) Cas f strictement monotone.

Théorème T.V.I (cas $\boldsymbol{f}$ strictement monotone)
Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$.
Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c\in[a, b]$ tel que $f(c)=\lambda$

Remarque : L'expression " Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c\in[a, b]$ tel que $f(c)=\lambda$ "peut-être formulée comme :
" Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x)=\lambda$ admet une solution unique dans $[a, b]$

3) Corolaires

Corolaire1 (T.V.I) : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ .Si $f(a)\times f(b)<0$ il existe au moins un $c\in[a, b]$ tel que $f(c)=0$

Corolaire2 (T.V.I) :
Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$ .Si $f(a)\times f(b)<0$ il existe un et un seul c dans $[a, b]$ tel que $f(c)=0$

VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

1) Théorème : Soit f une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle I, On a f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de

$J = f(I)$ vers I.
donc f est une bijection de I vers $f(I)$
D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I et on a :

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$$

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x \quad \forall x \in f(I)$$

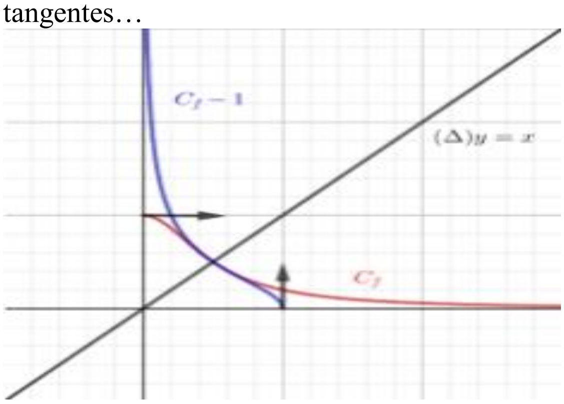
$$\left(f^{-1} \circ f\right)(y) = y \quad \forall y \in I$$

2) Propriété de la fonction réciproque

Propriété 1 : Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors f^{-1} à la même monotonie sur J que celle de f sur I.

Propriété 2 : Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors $\left(C_{f^{-1}}\right)$ et $\left(C_f\right)$ sont symétriques par rapport à :(Δ) $y = x$

Remarque :
La symétrie des deux courbes concerne toutes leurs composantes ; les asymptotes ; les tangentes et demi-tangentes…



3) La fonction racine n – éme

3.1 Définition et règles de calculs

Propriété et définition :

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; la fonction :
$f : x \to x^n$ est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} de $f\left(\mathbb{R}^+\right) = \mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$

La fonction réciproque f^{-1} s'appelle la fonction racine n – éme et se note $\sqrt[n]{\ }$

Conséquence de la définition :

1)La fonction $\sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}+$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt[n]{x} \geq 0$

3)$(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall y \in \mathbb{R}+)\ \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

4)La fonction $\sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}+$ strictement croissante.

5)$(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall y \in \mathbb{R}+)\ \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$

6)$(\forall x \in \mathbb{R}+)\ (\forall a \in \mathbb{R}+)\ \sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n$

7)$(\forall a \in \mathbb{R}+)\ \sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n$

8)$(\forall x \in \mathbb{R}+)\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$

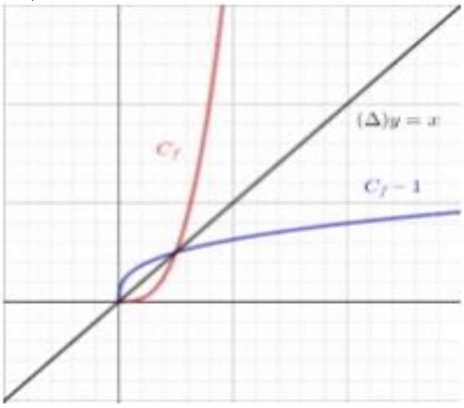
9)$(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall p \in \mathbb{N})\ \left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$

10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

11)Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

12)Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = l$ et $l \geq 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

13)La courbe de la fonction $\sqrt[n]{\ }$



Règle de calcul :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall y \in \mathbb{R}+)$ $\sqrt[n]{x \times y} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$

2) $(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall y \in \mathbb{R}*+)$ $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

3) $(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall n \in \mathbb{N}*)(\forall p \in \mathbb{N}*)$ $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[n \times p]{x}$

4) $(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall n \in \mathbb{N}*)(\forall p \in \mathbb{N}*)$ $\sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p}$
(à prouver)

Remarque :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}+)$ $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

2) $(\forall x \in \mathbb{R}+)$ $\sqrt[1]{x} = x$

3.2 Résolution de l'équation $x^n = a$

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^5 = 32$ **2)** $x^7 = -128$ **3)** $x^4 = 3$ **4)** $x^6 = -8$

Solutions :1) $x^5 = 32$ **donc** $x > 0$

$x = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2^5} \Leftrightarrow x = 2$ **donc :** $S = \{2\}$

2) $x^7 = -128$ donc $x < 0$

Donc : $x = -\sqrt[7]{128} \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{2^7} \Leftrightarrow x = -2$

Donc : $S = \{-2\}$

3) $x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{3}$ ou $x = -\sqrt[4]{3}$

Donc : $S = \left\{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\right\}$

4) $x^6 = -8$

On a $x^6 \geq 0$ et $-8 < 0$ donc $S = \Phi$

3.3 L'expression conjuguai : On sait que

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

et $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ Il en résulte :

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} \text{ et } a+b=\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$$

Par suite :$(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall y \in \mathbb{R}*+)$

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}$$

$(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall y \in \mathbb{R}*+)$

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\frac{x+y}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}$$

4) Puissance rationnelle :

4.1 Puissance entier :

Rappelle : Soit x un réel et n un entier naturel non nul on a : $x^n=\underbrace{x\times x\times\ldots\times x}_{nfois}$ et $(x\neq 0)$ $\frac{1}{x^n}=x^{-n}$

4.2 Puissance rationnelle

Propriété : Pour tout réel $x\geq 0$ et pour tout entier non nul q on pose : $\sqrt[q]{x}=x^{\frac{1}{q}}$

Définition : Soit x un réel positif et r un rationnel $(r \in \mathbb{Q})$; $r=\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}*$ on pose :

$$x^r=x^{\frac{p}{q}}=\left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

Propriétés : Soit x et y deux réels positifs, r et r' des rationnels on a :

1. $x^{r+r'}=x^r\times x^{r'}$
2. $x^{r\times r'}=(x^r)^{r'}=(x^{r'})^r$
3. $x^{-r'}=\frac{1}{x^{r'}}$ $(x\neq 0)$
4. $x^{r-r'}=\frac{x^r}{x^{r'}}$ $(x\neq 0)$
5. $(xy)^r=x^ry^r$
6. $\left(\frac{x}{y}\right)^r=\frac{x^r}{y^r}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien