Exercices avec solutions *: LA DERIVATION*

PROF : ATMANI NAJIB 2BAC BIOF

LA DERIVATION

Exercice1 :

1- Montrer en utilisant la définition que la fonction $f(x)=x^2+x-3$ *est dérivable en* a *= -2.*

2) soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}\ldots x\geq 1 \\ f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}\ldots x\prec 1 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=3x^2+x;x\prec 0 \\ f(x)=-2x^2+3x;x\geq 0 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0=0$

Solution :

1) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+x-3+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}x-1=-3=f'(-2)$

Donc f est dérivable en en -2 et $f'(-2)=-3$

on a $f(1)=\sqrt{1}=1$

2) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}==\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}=f'_d(1)$

Donc f est dérivable à droite en 1

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{4}(x+1)=\frac{1}{2}=f'_g(1)$

Donc f est dérivable à gauche en 1

et on a : $f'_d(1)=f'_g(1)$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=\frac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-2x^2+3x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}-2x+3=3=f'_d(0)$

3 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à droite de 0

On dit que f est dérivable à droite en 0

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{3x^2+x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}3x+1=1=f'_g(0)$

1 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à gauche de 0

On dit que f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f'_d(0)\neq f'_g(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2: soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=(1+x)\sqrt{1-x^2}\ldots 0\leq x\leq 1 \\ f(x)=\sqrt{x^3-x}\ldots x\succ 1 \end{cases}$$

1)déterminer le domaine de définition de f

2)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0=0$ et donner une interprétation géométrique du résultat

3)étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique

Solution :1) $x\in D_f\Leftrightarrow 1-x^2\geq 0$ et $0\leq x\leq 1$

ou $x^3-x\geq 0$ et $x\succ 1$

$x\in D_f\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$ ou $x\succ 1$

$x\in D_f\Leftrightarrow x\in[0;+\infty[$ donc : $D_f=[0;+\infty[$

2) étude de la dérivabilité de f à droite de $x_0=0$

On a : $f(0)=1$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}-1}{x}=\frac{x\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}-1}{x}$

$=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{x\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}=\sqrt{1-x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}+1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1=f'_d(0)$

Donc f est dérivable à droite en 0

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent en A(0, 1).de coefficient directeur $1=f'_d(0)$

3)a)étudie de la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 1$ On a : $f(1) = 0$ soit $0 \le x \le 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \frac{(1+x)(1-x^2)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et puisque : $\lim_{x\to1^-} \sqrt{1-x^2} = 0^+$ et $\lim_{x\to1^-} -(1+x)^2 = -4$

Alors : $\lim_{x\to1^-} \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$ donc : $\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0 = 1$

b)soit $x \succ 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^3-x}-0}{x-1} = \frac{x(x+1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^3-x}} = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}}$$

Et puisque : $\lim_{x\to1^+} \sqrt{x^3-x} = 0^+$ et $\lim_{x\to1^+} x^2+x = 2$

Alors : $\lim_{x\to1^+} \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}} = +\infty$ donc : $\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 1$

Interprétation géométrique du résultat :
La courbe de f admet un demi tangent en A(1,0) parallèle à l'axe des ordonnées dirigé vers le le haut

Exercice3 : soit f une fonction définie par :

$f(x) = |x^2-1|$

1)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat
2)étudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat
3)étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat
4)donner l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = 1$
4)donner l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = 1$

Solution :1) $f(x) = |x^2-1|$

étude du signe de : x^2-1

$x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1 ou x=1$

Donc : $\begin{cases} f(x) = x^2-1; x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\\ f(x) = -(x^2-1); x \in [-1;1] \end{cases}$ et

$f(1) = |1^2-1| = 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1)étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2-1-0}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} x+1 = 2$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 1$ et $f'_d(1) = 2$

Interprétation géométrique du résultat :
La courbe de f admet un demi tangent à droite en A(1, 0).de coefficient directeur $f'_d(1) = 2$

2)

$$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{-(x^2-1)-0}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} -(x+1) = -2$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = 1$ et $f'_g(1) = -2$

Interprétation géométrique du résultat :
La courbe de f admet un demi tangent à gauche en A(1, 0).de coefficient directeur $f'_g(1) = -2$

3)f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$ car : $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

Interprétation géométrique du résultat :
La courbe admet un point anguleux en A(1, 0).

4) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = 1$ est :

$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x-x_0)$

5) l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = 1$ est :

$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x-x_0)$

$y = f(1) + f'_g(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 0-2(x-1) \Leftrightarrow (\Delta_g) : y = -2x+2$

Exercice4 : Calculer le nombre dérivé de $f(x) = x^3 + x$ en a = 1 en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

Solution : $\lim_{h\to0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$= \lim_{h\to0} \frac{(1+h)^3+1+h-2}{h} = \lim_{h\to0} \frac{h^3+3h^2+3h+1+1+h-2}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{h^3+3h^2+4h}{h} = \lim_{h\to0} h^2+3h+4 = 4 = f'(1)$$

Exercice5 : donner une approximation de $sin3$

Solution : Si on veut une approximation de $sin3$, on peut prendre :$f(x) = sinx$ et $a = \pi$ (car π est

l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est connu) $h = 3 - \pi$ (pour avoir :$3 = \pi + h$)
On a alors $f(a) = sin\pi = 0$ et $f'(a) = cos\pi = -1$ (à prouver) ce qui donne :
$sin3 = sin(\pi + h) \sim -1 \times (3 - \pi) = \pi - 3$.

Exercice6 : Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée dans les cas suivants :

1) $f(x)=x^2+3x-1$ 2) $f(x)=4\sin x$

3) $f(x)=x^4\cos x$ 4) $f(x)=\sqrt{x}+x^3$

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 6) $f(x)=\dfrac{6}{4x^2+3x-1}$

7) $f(x)=\dfrac{4x-3}{2x-1}$ 8) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

9) $f(x)=(2x+3)^5$

Solution : 1) $f(x)=x^2+3x-1$ $D_f=\mathbb{R}$

f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=(x^2)'+(3x-1)'=2x+3$

2) $f(x)=4\sin x$ $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=4u(x)$ avec $u(x)=\sin x$

Puisque u est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=4(u(x))'=4\cos x$

3) $f(x)=x^4\cos x$ $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=x^4$ et $v(x)=\cos x$

Puisque u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=((x^4)\times(\cos x))'=(x^4)'\times(\cos x)+(x^4)\times(\cos x)'$

$f'(x)=4x^3\times(\cos x)-x^4\times\sin x=4x^3\cos x-x^4\times\sin x$

4) $f(x)=\sqrt{x}+x^3$ $D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

$f(x)=u(x)+v(x)$ avec $u(x)=\sqrt{x}$ et $v(x)=x^3$

Puisque u est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et v est dérivables en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=(u(x))'+(v(x))'=\dfrac{2}{2\sqrt{x}}+3x^2$

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $D_f=\mathbb{R}^{*+}=]0;+\infty[$

On a : $f(x)=\dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=\sqrt{x}$

Puisque u est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc f est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

On utilise la formule : $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)==\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

6) $f(x)=\dfrac{6}{4x^2+3x-1}$ $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;\dfrac{1}{4}\right\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;\dfrac{1}{4}\right\}$

est on a : $f(x)=\dfrac{6}{u(x)}$ avec $u(x)=4x^2+3x-1$

$$f'(x)=6\left(\frac{1}{u(x)}\right)'=6\left(-\frac{u'}{u^2}\right)=-6\frac{(4x^2+3x-1)'}{(4x^2+3x-1)^2}-6\frac{8x+3}{(4x^2+3x-1)^2}$$

7) $f(x)=\dfrac{4x-3}{2x-1}$ $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$f(x)=u(x)/v(x)$ avec $u(x)=4x-3$ et $v(x)=2x-1$

On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$$

8) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$: $D_f=]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

On a : $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-4$

Et on a : $u(x)\succ 0$ $\forall x\in D_f-\{-2;2\}$

Donc f est dérivables sur $D_f-\{-2;2\}$

$\forall x \in D_f - \{-2;2\}$:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-4}\right)'=\frac{\left(x^2-4\right)'}{2\sqrt{x^2-4}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

9) $f(x)=(2x+3)^5$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=(u(x))^5$ avec $u(x)=2x+3$

On utilise la formule : $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((2x+3)^5\right)'=5\times(2x+3)^{5-1}\times(2x+3)'=5\times 2\times(2x+3)^4=10(2x+3)^4$$

Exercice7 : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\sin\left(2x^2-1\right)$

2) $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x^2+2}\right)$

3) $f(x)=\tan\cos(x)$

Exercice8: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = cosx$

1)montrer que f est une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1,1]$

2)calculer : $\left(f^{-1}\right)'(0)$

Solutions :1) f est continue

Et : $f(x)=-\sin x \le 0$ sur $[0, \pi]$ donc f strictement décroissante sur $[0, \pi]$ donc f est une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1,1]$ et on a : $f(\pi/2) = 0$

et $f'(\pi/2) = cos'(\pi/2) = -sin(\pi/2) = -1 \neq 0$

alors f^{-1} est dérivable en 0

$$\left(f^{-1}\right)'(0)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{-1}=-1$$

Exercice9 : soit f une fonction définie par :

$f(x)=x^3+x^2$

1- Dresser le tableau de variation de f

2- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ et calculer $f(1)$.

3- Déterminer $\left(f^{-1}\right)'(2)$

Exercice10 : Soit la fonction $g(x) = \cos(2x)$

1- Dresser le tableau de variation de g dans $[0, \pi]$

2- Monter que g est une bijection de $]0, \pi/2[$ Vers $]-1,1[$.

3- Vérifier que $(\forall y \in]0,\pi/2[)\ (g'(y) \neq 0)$ et déterminer $(g^{-1})'(x)$ pour x dans $]-1,1[$.

Solutions :1) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})(g'(x) = -2\sin(2x))$

- Si $x \in [0,\pi/2]$ alors $2x \in [0, \pi]$ et par suite : $g'(x) = -2\sin(2x) \le 0$
- Si $x \in [\pi/2, \pi]$ alors $2x \in [\pi, 2\pi]$ et par suite $g'(x) = -2\sin(2x) \ge 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

2- La fonction g est continue (composition de deux fonctions continues) strictement décroissante de $]0,\pi/2[$ vers $g(]0,\pi/2[)$

$g(]0,\pi/2[) =]\lim\limits_{x\to\pi/2^-} g(x),\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)[=]-1,1[$

Donc g est une bijection de $]0,\pi/2[$ vers $]-1,1[$; soit g^{-1} sa fonction réciproque.

3- On a : g est dérivable sur $]0,\pi/2[$

et $(\forall x \in]0,\pi2[)\ (g'(x) = -2\sin(2x) \neq 0)$

donc g^{-1} est dérivables sur $]-1,1[$.

Soit $x \in]-1,1[$; $\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}$

$$=\frac{1}{-2\sin\left(2g^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{-2\sqrt{1-\cos^2\left(2g^{-1}(x)\right)}}$$

$$=\frac{1}{-2\sqrt{1-\left(g\left(g^{-1}(x)\right)\right)^2}}=\frac{1}{-2\sqrt{1-x^2}}$$

Pour x dans $]-1,1[$. $\boxed{\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{-2\sqrt{1-x^2}}}$

Exercice 11 :Déterminer les domaines de dérivabilité et les fonctions dérivées des fonctions suivantes :1) $f(x)=\sqrt[3]{3x^2+x-4}$

2) $f(x)=\sqrt[4]{\frac{2x-1}{x^2-x}}$

Exercice12 :résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : (E_1): $\sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}=\sqrt[6]{9-x^2}$

(E_2): $2x\sqrt{x}-3x\sqrt[4]{\frac{1}{x}}=20$

Correction : 1) (E_1): $\sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}=\sqrt[6]{9-x^2}$

Le domaine de définition de l'équation (E_1)

Est : $D_{(E_1)}=[-3;3]$

On a :

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

$(E_1)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}\right)^3=\left(\sqrt[6]{9-x^2}\right)^3$

$\Leftrightarrow(3+x)-(3-x)-3\sqrt[3]{9-x^2}\sqrt[6]{9-x^2}=\sqrt{9-x^2}$

On a :

$\sqrt[3]{9-x^2}\sqrt[6]{9-x^2}=\sqrt[6]{\left(9-x^2\right)^2}\sqrt[6]{9-x^2}=\sqrt[6]{\left(9-x^2\right)^3}=\sqrt{9-x^2}$

Donc : $(E_1)\Leftrightarrow 2x-3\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-x^2}$

$(E_1)\Leftrightarrow x=2\sqrt{9-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=4\left(9-x^2\right)\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

Donc : $S=\left\{\frac{6\sqrt{5}}{5}\right\}$

2) $2x\sqrt{x}-3x\sqrt[4]{\frac{1}{x}}=20$

Le domaine de définition de l'équation (E_2)

Est : $D_{(E_2)}=]0;+\infty[$

Soit $x\succ 0$ on pose : $t=\sqrt[4]{x}$ donc $t\succ 0$

Et on a : $(E_2)\Leftrightarrow 2t^6-3t^3-20=0$ ($t^3=T$)

$(E_2)\Leftrightarrow 2T^2-3T-20=0\quad \Delta=169$

La solution positive de cette équation est : $T=4$

Donc : $t^3=4\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{4}$ et on a : $t=\sqrt[4]{x}$

Donc :

$x=t^4\Leftrightarrow x=\left(\sqrt[3]{4}\right)^4=\left(\sqrt[3]{4}\right)^3\sqrt[3]{4}=4\sqrt[3]{4}$

Donc : $S=\left\{4\sqrt[3]{4}\right\}$

Exercice 13 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x+1}}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}$ **4)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2}-x$

Solutions : 1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ on pose

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=L_1$

On a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

Et : $a^4-b^4=(a-b)\left(a^3+a^2b++a^2b^2+b^3\right)$

$L_1=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}\frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}$

$L_1=\lim\limits_{x\to1}(x+1)\frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}=2\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{x^3}-\sqrt[12]{(x+1)^4}}{\sqrt[12]{x^6}-\sqrt[12]{(x+1)^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[12]{\frac{(x+1)^4}{x^6}}\frac{\sqrt[12]{\frac{x^3}{(x+1)^4}}-1}{1-\sqrt[12]{\frac{(x+1)^2}{x^6}}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[12]{\frac{(x+1)^4}{x^6}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[12]{\frac{x^3}{(x+1)^4}}-1=-1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\sqrt[12]{\frac{(x+1)^2}{x^6}}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x+1}}=0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2}-x$

On a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^3-x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1}$$

$=\frac{1}{3}$ car $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}=1$

Exercice14 : soit f une fonction définie sur $I=]-\pi;\pi[$ par : $\begin{cases} f(x)=2\frac{\cos x-1}{\sin x};si...0\prec x\prec\pi \\ f(x)=\frac{x|x+1|}{x-1};si...-\pi\prec x\leq 0\end{cases}$

1)monter que f est dérivable en $x_0=0$

et donner l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0=0$

2)a)étudier la dérivabilité de f en $x_0=-1$

b)donner les équations des demies tangentes à a la courbe de f en en $x_0=-1$

Solution : 1)étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0=0$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}2\frac{\cos x-1}{x\sin x}=\lim_{x\to0^+}-2\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2\times\frac{1}{2}\times1=-1=f'_d(0)$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0=0$ et $f'_d(0)=-1$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{|x+1|}{x-1}=\lim_{x\to0^-}\frac{x+1}{x-1}=-1=f'_g(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0=0$ et

$f'_g(0)=-1$

Et puisque : $f'_d(0)=f'_g(0)$

Donc f est dérivable à en $x_0=0$ et $f'(0)=-1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une tangent en O(0, 0).de coefficient directeur $f'(0)=-1$

l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0=0$ est : $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=f(0)+f'(0)(x-0)$

$y=0-1(x-0)\Leftrightarrow(T):y=-x$

2) $\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}=f'_d(-1)$

Donc f est dérivable à droite en $x_0=-1$ et $f'_d(-1)=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{-x}{x-1}=-\frac{1}{2}=f'_g(-1)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0=-1$ et

$f'_g(-1)=-\frac{1}{2}$ mais on a : $f'_d(-1)\neq f'_g(-1)$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0=-1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe admet un point anguleux en A(-1, 0).

b) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0=-1$ est :

$y=f(-1)+f'_d(-1)(x+1)$ avec $x\geq-1$

$y=0+\frac{1}{2}(x+1)\Leftrightarrow(T_d):y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ avec $x\geq-1$

l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0=-1$ est :

$y=f(-1)+f'_g(-1)(x+1)$ avec $x\leq-1$

$y=0-\frac{1}{2}(x+1)\Leftrightarrow(T_g):y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ avec $x\leq-1$

Exercice15 : soit f une fonction définie par :

$$f(x)=\sqrt{3x-2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$$

1)déterminer le domaine de définition D_f de f

2) déterminer le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée

Solution : 1) $x\in D_f\Leftrightarrow 3x-2\geq0$ et $x-1\neq0$

Donc : $D_f=\left[\frac{2}{3};1\right[\cup]1;+\infty[$

2) on a $f(x)=g(3x-2)\times h(x)$

Avec : $h(x)=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$ et $g(x)=\sqrt{x}$

On sait que : g est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et la fonction polynôme D_f $x\to3x-2$ est dérivable sur D_f

$3x-2 \succ 0 \Leftrightarrow x \succ \frac{3}{2}$ donc la fonction $x \to g(3x-2)$ est dérivable sur $D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

donc : f est dérivable sur $D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ cad $D_{f'} = D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

$\forall x \in D_{f'}$:

$$f'(x) = \left(g(3x-2)\right)' \times h(x) + g(3x-2) \times \left(h(x)\right)'$$

$$\left(g(3x-2)\right)' = (3x-2)' \times g'(3x-2) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-2}}$$

Car : $g'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left(h(x)\right)' = 3\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' \times \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$$

$$\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \times \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3 + \sqrt{3x-2}\,\frac{-9}{(x-1)^2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$$

Exercice16 :en utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1}$ 2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$

Solution:1) on pose : $f(x) = (x+2)^{2018}$ on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en -1 et

$f(-1) = (-1+2)^{2018} = 1$

Donc : $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1)$

Et puisque : $f'(x) = 2018(x+2)^{2017}(x+2)' = 2018(x+2)^{2017}$

Donc : $f'(-1) = 2018 \times 1^{2017} = 2018$

Donc: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1} = 2018$

2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$ on pose $f(x) = 2\sin x$

on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en $\frac{\pi}{6}$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$

Donc : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \left(\frac{\pi}{6}\right)} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Et puisque : $f'(x) = 2\cos x$

Donc : $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Donc : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien