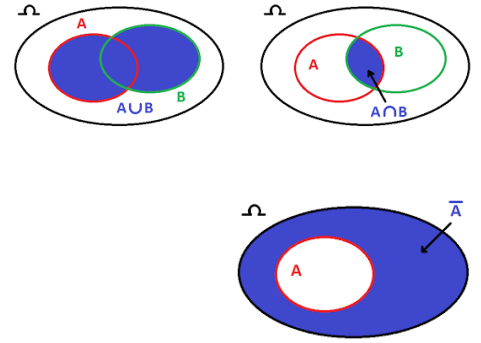


## I) Cardinal d'un ensemble fini - Parties d'un ensemble.

- Soit  $\Omega$  un ensemble fini de  $n$  éléments,  $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ .  
L'entier naturel  $n$  est appelé **cardinal** de  $\Omega$ . On note :  $\text{card}\Omega = n$
- $A$  et  $B$  désignent deux parties de  $\Omega$ . On écrit :  $A \subset \Omega$  et  $B \subset \Omega$
- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles **disjoints** (c'est-à-dire  $A \cap B = \emptyset$ ) alors  $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B$
- $\bar{A} = \{x \in \Omega : x \notin A\}$ , est le **complémentaire** de  $A$ .
- $\bar{A} \cup A = \Omega$  et  $\bar{A} \cap A = \emptyset$
- $\text{card} \bar{A} = \text{card}\Omega - \text{card}A$



## II) Principe de produit ou principe fondamental de dénombrement.

- arbre de choix
- Principe de produit : Si une expérimentation complexe peut se décomposer en  $p$  opérations élémentaires successives tels que :
  - La **première** opération peut être effectuée de  $n_1$  manières différentes.
  - La **deuxième** opération peut être effectuée de  $n_2$  manières différentes.
  - La **troisième** opération peut être effectuée de  $n_3$  manières différentes. Et ainsi de suite ...
  - La  $p^{\text{ième}}$  opération peut être effectuée de  $n_p$  manières différentes.

Alors l'ensemble de toutes ces opérations peut être effectuées de  $N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p$  manières différentes

## III) Arrangements et permutation d'un ensemble fini.

- Arrangements sans répétitions.

- Notion de factorielle : Soit  $n$  un entier naturel tel que  $n > 1$

On appelle "  $n$  factorielle " le nombre entier noté  $n!$  tel que  $n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

Par convention, on pose  $0! = 1$  et  $1! = 1$ .

- $\Omega$  étant un ensemble à  $n$  éléments, on appelle **arrangement** de  $p$  éléments de  $\Omega$ , toute suite de  $p$  éléments **distincts** de  $\Omega$ . On le note  $A_n^p$ .

Il y a  $n$  façons de choisir le 1<sup>er</sup> élément,  $(n-1)$  façons de choisir le 2<sup>ème</sup> élément, ...,  $[n-(p-1)]$  façons de choisir le  $p^{\text{ème}}$ . et d'après le principe

Donc  $A_n^p = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$  si  $p \leq n$ .

$A_n^0 = 1$  ;  $A_n^1 = n$  ;  $A_n^n = n!$ .

- $\Omega$  étant un ensemble à  $n$  éléments, on appelle **permutation**, tout arrangement des  $n$  éléments de  $\Omega$ .  
Il y a  $n!$  permutations de  $\Omega$  si les  $n$  éléments sont distinguables entre eux.

- Arrangements avec répétitions.

C'est le nombre d'arrangements que l'on peut faire avec  $p$  éléments choisis parmi  $n$  éléments, chacun d'eux peut figurer **plusieurs** fois dans le même arrangement. Le nombre d'arrangements avec **répétitions** est  $n^p$

**N. B.** : Quand il s'agit de classer  $k$  « objets », rangés en  $p$  groupes dont les éléments sont considérés comme indistinguables entre eux à l'intérieur de chaque groupe, il faut trouver le nombre de permutations distinctes de  $p$  objets quand  $k_1$  sont d'une sorte,  $k_2$  d'une autre, ...,  $k_p$  de la  $p^{\text{ème}}$  sorte, avec  $k_1 + k_2 + \dots + k_p = k$ .

Ce nombre est alors :  $\frac{k!}{k_1! \times k_2! \times \dots \times k_p!}$ .

#### IV) Combinaisons d'un ensemble fini .

$\Omega$  étant un ensemble à  $n$  éléments, on appelle **combinaison** de  $p$  éléments de  $\Omega$ , toute partie de  $p$  éléments de  $\Omega$ . On la note  $C_n^p$  telle que :  $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} / 1 \leq p \leq n$ .

**Formules usuelles** :  $C_n^p = C_n^{n-p}$  ;  $C_n^0 = C_n^n = 1$  ;  $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$  ;  $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \quad (\text{formule de Pascal}) \quad ; \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \quad (\text{formule du binôme})$$

#### V) Types de tirages.

- La plupart des expériences aléatoires peuvent être interprétées comme des tirages de  $p$  boules d'une urne qui en contient  $n$ .
- Il y a **deux critères** pour distinguer ces tirages :
  - 1) L'ordre** : Si l'ordre dans lequel on tire les boules est pris en considération, on dit que c'est un « tirage avec ordre », sinon c'est un « tirage sans ordre ».
  - 2) La répétition** : Si on remet chaque boule tirée dans l'urne avant de tirer la suivante, on peut tirer plusieurs fois la même boule : on parle alors d'un tirage avec répétition ou avec remise. Dans le cas contraire on parle d'un tirage sans répétition ou sans remise.

$\Omega$  étant un ensemble à  $n$  éléments, On tire  $p$  éléments parmi  $n$  éléments, donc :

Type de tirage	Ordre	Répétition	Nombre de tirages possibles
Successif avec remise	Pas important	Possible	$n^p$
Successif sans remise	Important	Impossible	$A_n^p \quad p \leq n$
Simultané	Important	Impossible	$C_n^p \quad p \leq n$