QCM DE MATHÉMATIQUES

Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).

Logique – Raisonnement | 30

1 Logique – Raisonnement | 30

1.1 Logique | Facile | 30.01

Question 1

Soit P une assertion vraie et Q une assertion fausse. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ P ou Q
- ☐ P et Q
- ☐ non(P) ou Q
- ☐ non$(P$ et $Q)$

Question 2

Par quoi peut-on compléter les pointillés pour avoir les deux assertions vraies ?

$$x \geqslant 2 \quad \ldots \quad x^2 \geqslant 4 \qquad\qquad |y| \leqslant 3 \quad \ldots \quad 0 \leqslant y \leqslant 3$$

- ☐ $\Longleftarrow$ et $\Longrightarrow$
- ☐ $\Longrightarrow$ et $\Longrightarrow$
- ☐ $\Longleftarrow$ et $\Longrightarrow$
- ☐ $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$

Question 3

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - x \geqslant 0$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 - n \geqslant 0$
- ☐ $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x^3 - x| \geqslant 0$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \quad n^2 - 3 \geqslant 0$

Question 4
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\exists x > 0 \quad \sqrt{x} = x$
- ☐ $\exists x < 0 \quad \exp(x) < 0$
- ☐ $\exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 = 17$
- ☐ $\exists z \in \mathbb{C} \quad z^2 = -4$

Question 5
Un groupe de coureurs C chronomètre ses temps : $t(c)$ désigne le temps (en secondes) du coureur c. Dans ce groupe Valentin et Chloé ont réalisé le meilleur temps de 47 secondes. Tom est déçu car il est arrivé troisième, avec un temps de 55 secondes. À partir de ces informations, quelles sont les assertions dont on peut déduire qu'elles sont vraies ?

- ☐ $\forall c \in C \quad t(c) \geqslant 47$
- ☐ $\exists c \in C \quad 47 < t(c) < 55$
- ☐ $\exists c \in C \quad t(c) > 47$
- ☐ $\forall c \in C \quad t(c) \leqslant 55$

Question 6
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La négation de "$\forall x > 0 \quad \ln(x) \leqslant x$" est "$\exists x \leqslant 0 \quad \ln(x) \leqslant x$".
- ☐ La négation de "$\exists x > 0 \quad \ln(x^2) \neq x$" est "$\forall x > 0 \quad \ln(x^2) = x$".
- ☐ La négation de "$\forall x \geqslant 0 \quad \exp(x) \geqslant x$" est "$\exists x \geqslant 0 \quad \exp(x) \leqslant x$".
- ☐ La négation de "$\exists x > 0 \quad \exp(x) > x$" est "$\forall x > 0 \quad \exp(x) < x$".

2 Logique | Moyen | 30.01

Question 7
Soit P une assertion fausse, Q une assertion vraie et R une assertion fausse. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Q et (P ou R)
- ☐ P ou (Q et R)
- ☐ non(P et Q et R)
- ☐ (P ou Q) et (Q ou R)

Question 8
Soient P et Q deux assertions. Quelles sont les assertions toujours vraies (que P et Q soient vraies ou fausses) ?

- ☐ P et non(P)
- ☐ non(P) ou P
- ☐ non(Q) ou P
- ☐ $(P$ ou $Q)$ ou $(P$ ou non$(Q))$

Question 9

Par quoi peut-on compléter les pointillés pour avoir une assertion vraie ?

$$|x^2| < 5 \quad \ldots \quad -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

- ☐ $\Longleftarrow$
- ☐ $\Longrightarrow$
- ☐ $\Longleftrightarrow$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Question 10

À quoi est équivalent $P \Longrightarrow Q$?

- ☐ non(P) ou non(Q)
- ☐ non(P) et non(Q)
- ☐ non(P) ou Q
- ☐ P et non(Q)

Question 11

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall x \in]0, +\infty[\quad \exists y \in \mathbb{R} \qquad y = f(x)$
- ☐ $\exists x \in]0, +\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad y = f(x)$
- ☐ $\exists x \in]0, +\infty[\quad \exists y \in \mathbb{R} \qquad y = f(x)$
- ☐ $\forall x \in]0, +\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad y = f(x)$

Question 12

Le disque centré à l'origine de rayon 1 est défini par

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall x \in [-1, 1] \quad \forall y \in [-1, 1] \qquad (x, y) \in D$
- ☐ $\exists x \in [-1, 1] \quad \exists y \in [-1, 1] \qquad (x, y) \in D$
- ☐ $\exists x \in [-1, 1] \quad \forall y \in [-1, 1] \qquad (x, y) \in D$
- ☐ $\forall x \in [-1, 1] \quad \exists y \in [-1, 1] \qquad (x, y) \in D$

3 Logique | Difficile | 30.01

Question 13

On définit l'assertion "ou exclusif", noté "xou" en disant que "P xou Q" est vraie lorsque P est vraie, ou Q est vraie, mais pas lorsque les deux sont vraies en même temps. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si "P ou Q" est vraie alors "P xou Q" aussi.
- ☐ Si "P ou Q" est fausse alors "P xou Q" aussi.
- ☐ "P xou Q" est équivalent à "(P ou Q) et (non(P) ou non(Q))"
- ☐ "P xou Q" est équivalent à "(P ou Q) ou (non(P) ou non(Q))"

Question 14

Soient P et Q deux assertions. Quelles sont les assertions toujours vraies (que P, Q soient vraies ou fausses) ?

- ☐ $(P \implies Q)$ ou $(Q \implies P)$
- ☐ $(P \implies Q)$ ou (P et non(Q))
- ☐ P ou $(P \implies Q)$
- ☐ $(P \iff Q)$ ou (non(P) $\iff$ non(Q))

Question 15

À quoi est équivalent $P \Longleftarrow Q$?

- ☐ non(Q) ou P
- ☐ non(Q) et P
- ☐ non(P) ou Q
- ☐ non(P) et Q

Question 16

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \exp(x) - 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall x, x' \in \mathbb{R} \qquad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$
- ☐ $\forall x, x' \in \mathbb{R} \qquad x \neq x' \Longleftarrow f(x) \neq f(x')$
- ☐ $\forall x, x' \in \mathbb{R} \qquad x \neq x' \implies (\exists y \in \mathbb{R} \quad f(x) < y < f(x'))$
- ☐ $\forall x, x' \in \mathbb{R} \qquad f(x) \times f(x') < 0 \implies x \times x' < 0$

Question 17

On considère l'ensemble

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } y \geqslant \sqrt{x}\right\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall y \geqslant 0 \quad \exists x \in [0,1] \qquad (x,y) \in E$
- ☐ $\exists y \geqslant 0 \quad \forall x \in [0,1] \qquad (x,y) \in E$
- ☐ $\forall x \in [0,1] \quad \exists y \geqslant 0 \qquad (x,y) \notin E$
- ☐ $\forall x \in [0,1] \quad \forall y \geqslant 0 \qquad (x,y) \notin E$

Question 18

Soit $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ une fonction. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La négation de "$\forall x > 0 \quad \exists y > 0 \quad y \neq f(x)$" est "$\exists x > 0 \quad \exists y > 0 \quad y = f(x)$".
- ☐ La négation de "$\exists x > 0 \quad \forall y > 0 \quad y \times f(x) > 0$" est "$\forall x > 0 \quad \exists y > 0 \quad y \times f(x) < 0$".
- ☐ La négation de "$\forall x, x' > 0 \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$" est "$\exists x, x' > 0 \quad x = x'$ et $f(x) = f(x')$".
- ☐ La négation de "$\forall x, x' > 0 \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$" est "$\exists x, x' > 0 \quad x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$".

4 Raisonnement | Facile | 30.03, 30.04

Question 19

Je veux montrer que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier, quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Quelles sont les démarches possibles ?

- ☐ Montrer que la fonction $x \mapsto x(x+1)$ est paire.
- ☐ Séparer le cas n pair, du cas n impair.
- ☐ Par l'absurde, supposer que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un réel, puis chercher une contradiction.
- ☐ Le résultat est faux, je cherche un contre-exemple.

Question 20

Je veux montrer par récurrence l'assertion $H_n : 2^n > 2n-1$, pour tout entier n assez grand. Quelle étape d'initialisation est valable ?

- ☐ Je commence à $n = 0$.
- ☐ Je commence à $n = 1$.
- ☐ Je commence à $n = 2$.
- ☐ Je commence à $n = 3$.

Question 21

Je veux montrer par récurrence l'assertion $H_n : 2^n > 2n-1$, pour tout entier n assez grand. Pour l'étape d'hérédité je suppose H_n vraie, quelle(s) inégalité(s) dois-je maintenant démontrer ?

- ☐ $2^{n+1} > 2n+1$
- ☐ $2^n > 2n-1$
- ☐ $2^n > 2(n+1)-1$
- ☐ $2^n + 1 > 2(n+1)-1$

Question 22
Chercher un contre-exemple à une assertion du type "$\forall x \in E$ l'assertion $P(x)$ est vraie" revient à prouver l'assertion :

- ☐ $\exists! x \in E$ l'assertion $P(x)$ est fausse.
- ☐ $\exists x \in E$ l'assertion $P(x)$ est fausse.
- ☐ $\forall x \notin E$ l'assertion $P(x)$ est fausse.
- ☐ $\forall x \in E$ l'assertion $P(x)$ est fausse.

5 Raisonnement | Moyen | 30.03, 30.04

Question 23
J'effectue le raisonnement suivant avec deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \times g(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \big(f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0\big)$$
$$\Longrightarrow \big(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0\big) \text{ ou } \big(\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 0\big)$$

- ☐ Ce raisonnement est valide.
- ☐ Ce raisonnement est faux car la première implication est fausse.
- ☐ Ce raisonnement est faux car la seconde implication est fausse.
- ☐ Ce raisonnement est faux car la première et la seconde implication sont fausses.

Question 24
Je souhaite montrer par récurrence une certaine assertion H_n, pour tout entier $n \geqslant 0$. Quels sont les débuts valables pour la rédaction de l'étape d'hérédité ?

- ☐ Je suppose H_n vraie pour tout $n \geqslant 0$, et je montre que H_{n+1} est vraie.
- ☐ Je suppose H_{n-1} vraie pour tout $n \geqslant 1$, et je montre que H_n est vraie.
- ☐ Je fixe $n \geqslant 0$, je suppose H_n vraie, et je montre que H_{n+1} est vraie.
- ☐ Je fixe $n \geqslant 0$ et je montre que H_{n+1} est vraie.

Question 25
Je veux montrer que $e^x > x$ pour tout x réel avec $x \geqslant 1$. L'initialisation est vraie pour $x = 1$, car $e^1 = 2,718\ldots > 1$. Pour l'hérédité, je suppose $e^x > x$ et je calcule :

$$e^{x+1} = e^x \times e > x \times e \geqslant x \times 2 \geqslant x + 1.$$

Je conclus par le principe de récurrence. Pour quelles raisons cette preuve n'est pas valide ?

- ☐ Car il faudrait commencer l'initialisation à $x = 0$.
- ☐ Car x est un réel.
- ☐ Car l'inégalité $e^x > x$ est fausse pour $x \leqslant 0$.
- ☐ Car la suite d'inégalités est fausse.

Question 26
Pour montrer que l'assertion "$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 > 3n - 1$" est fausse, quels sont les arguments valables ?

- ☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 0$ l'inégalité est fausse.
- ☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 1$ l'inégalité est fausse.
- ☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 2$ l'inégalité est fausse.
- ☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 1$ et $n = 2$ l'inégalité est fausse.

6 Raisonnement | Difficile | 30.03, 30.04

Question 27
Le raisonnement par contraposée est basé sur le fait que "$P \implies Q$" est équivalent à :

- ☐ "non$(P) \implies$ non(Q)".
- ☐ "non$(Q) \implies$ non(P)".
- ☐ "non(P) ou Q".
- ☐ "P ou non(Q)".

Question 28
Par quelle phrase puis-je remplacer la proposition logique "$P \Longleftarrow Q$" ?

- ☐ "P si Q"
- ☐ "P seulement si Q"
- ☐ "Q est une condition nécessaire pour obtenir P"
- ☐ "Q est une condition suffisante pour obtenir P"

Question 29
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La négation de "$P \implies Q$" est "non(Q) ou P"
- ☐ La réciproque de "$P \implies Q$" est "$Q \implies P$"
- ☐ La contraposée de "$P \implies Q$" est "non$(P) \implies$ non(Q)"
- ☐ L'assertion "$P \implies Q$" est équivalente à "non(P) ou non(Q)"

Question 30

Je veux montrer que $\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$ par un raisonnement par l'absurde. Quel schéma de raisonnement est adapté ?

- ☐ Je suppose que $\sqrt{13}$ est rationnel et je cherche une contradiction.
- ☐ Je suppose que $\sqrt{13}$ est irrationnel et je cherche une contradiction.
- ☐ J'écris $13 = \frac{p}{q}$ (avec p, q entiers) et je cherche une contradiction.
- ☐ J'écris $\sqrt{13} = \frac{p}{q}$ (avec p, q entiers) et je cherche une contradiction.