

**TD LIMITE D'UNE FONCTION**  
**EXERCICES D'APPLICATIONS ET DE REFLEXIONS**

PROF: ATMANI NAJIB

1BAC SM BIOF

## LIMITE D'UNE FONCTION

**Exercice** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$

Montrer en utilisant la définition que :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**Exercice2** : 1) monter que :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2) a) monter que :  $\forall x \in ]-1; 1[ : |x^2 + 5x| \leq 6|x|$

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x$

**Exercice3** : monter que :  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

**Exercice4** : monter que :  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x+1} = 3$

**Exercice5** : étudier la limite de la fonction :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \text{ en } 0.$$

**Exercice6** : Soit la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

monter que :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 6$

**Exercice7** : Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

monter que :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$

**Exercice8** : Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x - E(x)$

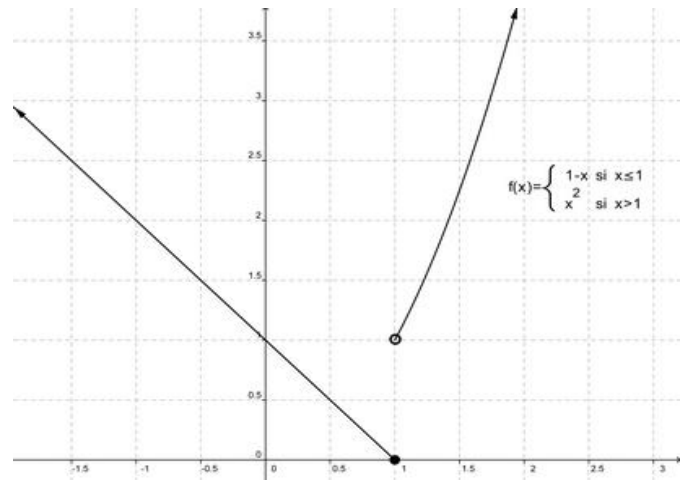
Où  $E$  désigne la partie entière.

- 1- Ecrire les expressions de  $f$  sans utiliser la partie entière sur les intervalles  $]0, 1[$  et  $]1, 2[$ .
- 2- Construire la courbe de la restriction de  $f$  sur  $[0, 2]$ .
- 3- La fonction  $f$  admet-elle une limite en 1.
- 4- Soit la fonction  $g(x) = x$  et  $h(x) = x - 1$ 
  - a) Remarquer que  $f$  et  $g$  sont confondues sur  $]0, 1[$  et que  $f$  et  $h$  sont confondues sur  $]1, 2[$
  - b) déterminer les limites de  $g$  et de  $h$  en 1.

**Exercice9** : Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

**Exercice10** :



La courbe ci-contre est la courbe de la fonction définie par Morceaux comme suite :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 1 - x \text{ si } x \leq 1$$

$$x \mapsto x^2 \text{ si } x > 1$$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction  $f$  à droite et à gauche de 1.

**Exercice11** : Soit la fonction  $g$  définie par :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 - x + 3 \text{ si } x \geq 1$$

$$x \mapsto -x^2 + x + \alpha \text{ si } x < 1$$

Déterminer  $\alpha$  pour que la fonction  $g$  admette une limite en 1.

**Exercice12** : Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de  $f$  en  $x_0 = -1$

**Exercice13** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{-3}{x^2+2}$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**Exercice14** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{1 + \sin x}{1 + \sqrt{x}}$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**Exercice15** : Soit la fonction :

$$f : x \mapsto (x^2 + x^4) \sin \frac{1}{x} \quad \text{déterminer : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

**Exercice16** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto 3x^2 + 5x + 1$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**Exercice17** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto x + \sin x - 1$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**Exercice18** : Soit  $f(x) = \frac{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

1- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) f(x) \geq \frac{1}{x^2}$

2- En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

**Exercice19** : déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x}$

**Exercice20** : déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2}$

**Exercice21** : déterminer :

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$       2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$

3)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$

**Exercice22** : calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$

**Exercice23** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 5x^2 - 7x^4$       2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3}$

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6}$       4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 3x + 2}$

**Exercice24** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$       2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$       3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$

**Exercice25** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$       2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$       3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)}$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

**Exercice26** : Soient les fonctions tels que :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$$

1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

3) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

**Exercice27** : calculer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}$       2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$       4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

