

TD LIMITE D'UNE FONCTION

EXERCICES D'APPLICATIONS ET DE REFLEXIONS AVEC SOLUTIONS

PROF : ATMANI NAJIB

1BAC SM BIOF

LIMITE D'UNE FONCTION

Exercice : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Solution : Montrons que :

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \alpha > 0) (\forall x \in Df) (0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon ?$

Soit : $x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ donc $|f(x)| = \left| \frac{x}{x+1} \right| \leq 2|x|$

Soit $\varepsilon > 0$ on cherche $\alpha > 0$ tel que :

$0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Pour avoir $|f(x)| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $2|x| < \varepsilon$ et

$|x| < \frac{\varepsilon}{2}$ cad $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|x| < \frac{1}{2}$

Il suffit de prendre α le plus petit des

nombre : $\frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{1}{2}$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Exercice2 : 1) monter que : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2) a) monter que : $\forall x \in]-1; 1[: |x^2 + 5x| \leq 6|x|$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x$

Solution : 1) on a $\forall x \in \mathbb{R}^* \left| \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right| \leq 1$

donc $|x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right)| \leq x^2$ et on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2) a) on a : $|x^2 + 5x| = |x(x+5)| = |x||x+5|$

Et puisque : $x \in]-1; 1[$ alors : $4 < x+5 < 6$

alors : $|x+5| < 6$ donc $|x^2 + 5x| \leq 6|x|$

b) puisque : $\lim_{x \rightarrow 0} 6|x| = 0$ alors : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x = 0$

Exercice3 : monter que : $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

Solution : $x \in \mathbb{R}^* \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$ donc :

$|f(x) - 2| = x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2$ et on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

Exercice4 : monter que : $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x+1} = 3$

Solution : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$|f(x) - 3| = \left| \sqrt{2x+1} - 3 \right| = \frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1} + 3}$

et on a $\sqrt{2x+1} + 3 \geq 3$ donc : $|f(x) - 3| \leq \frac{2}{3}|x-4|$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow 4} |x-4| = 0$ Alors : $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$

Exercice5 : étudier la limite de la fonction :

$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$ en 0.

Solution :

On remarque que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) :$

$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \frac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)}$

(on a multiplié par le conjugué)

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1}$ D'autre part :

$(\forall x \in \mathbb{R}^*) (|f(x)| \leq |x|)$ et puisque $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ alors

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Exercice6 : Soit la fonction définie par :

$f(x) = x^2 + 3x + 2$

monter que : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 6$

Solution : $f(-1+h) - 6 = h^2 - 5h$

$|f(-1+h) - 6| = |h^2 - 5h| = |h||h-5|$

Si $h \in]-1; 1[$ alors : $|f(-1+h) - 6| \leq 6|h|$

puisque : $\lim_{h \rightarrow 0} 6|h| = 0$ alors : $\lim_{h \rightarrow 0} f(-1+h) - 6 = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 6$

Exercice7 : Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

montrer que : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$

Solution : $f(-1+h) - 6 = h^2 - 5h$

$$f(2+h) - \frac{1}{3} = \frac{2h}{3+h}$$

Si $h \in]-1;1[$ alors : $\left| f(2+h) - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{2h}{3+h} \right| \leq |h|$

puisque : $\lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$ alors : $\lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) - \frac{1}{3} = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$

Exercice8 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x - E(x)$

Où E désigne la partie entière.

- 1- Ecrire les expressions de f sans utiliser la partie entière sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,2[$.
- 2- Construire la courbe de la restriction de f sur $[0,2]$.
- 3- La fonction f admet-elle une limite en 1.
- 4- Soit la fonction $g(x) = x$ et $h(x) = x - 1$
 - a) Remarquer que f et g sont confondues sur $]0,1[$ et que f et h sont confondues sur $]1,2[$
 - b) déterminer les limites de g et de h en 1.

Exercice9 : Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$

Si : $x > 1$: $f(x) = \frac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$

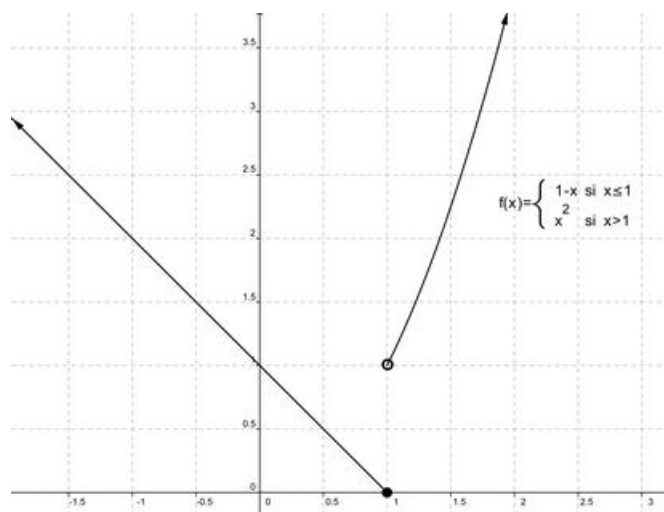
Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$

Si : $x < 1$: $f(x) = \frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{x}{x+1}$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -\frac{x}{x+1} = -\frac{1}{2}$

Remarque : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

Exercice10 :



La courbe ci-contre est la courbe de la fonction définie par Morceaux comme suite :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 1 - x \text{ si } x \leq 1$$

$$x \mapsto x^2 \text{ si } x > 1$$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction f à droite et à gauche de 1.

Exercice11 : Soit la fonction g définie par :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 - x + 3 \text{ si } x \geq 1$$

$$x \mapsto -x^2 + x + \alpha \text{ si } x < 1$$

Déterminer α pour que la fonction g admette une limite en 1.

Exercice12 : Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0 = -1$

Solution : Déterminons $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$?

Solution : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$

Si : $-1 < x < 1$: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -\frac{x+1}{x-1} = 0$

Si : $x < -1$: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x+1}{x-1} = 0$

donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

Exercice13 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{-3}{x^2+2}$

déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $x^2+2 \geq x^2$ donc

$|f(x)| \leq \frac{3}{x^2}$ et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2} = 0$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Exercice14 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}$

déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $1+\sqrt{x} \geq \sqrt{x}$ et

$0 \leq 1+\sin x \leq 2$ donc $\left| \frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ donc

$|f(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Exercice15 : Soit la fonction :

$f : x \mapsto (x^2+x^4) \sin \frac{1}{x}$ déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ et $x^2+x^4 \geq 0$

donc $-x^2-x^4 \leq (x^2+x^4) \sin \frac{1}{x} \leq x^2+x^4$ et puisque :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2+x^4 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2-x^4 = 0 \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Exercice16 : Soit la fonction : $f : x \mapsto 3x^2+5x+1$

déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ on a $3x^2 \leq 3x^2+5x+1$ et et

puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Exercice17 : Soit la fonction : $f : x \mapsto x + \sin x - 1$

déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc :

$x-2 \leq f(x) \leq x$ et puisque :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Exercice18 : Soit $f(x) = \frac{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) f(x) \geq \frac{1}{x^2}$

2- En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Exercice19 : déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x}$

Solution :

on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

Donc Formes indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right)$$

puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = +\infty$

Exercice20 : déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2}$

Solution : on a : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$

Exercice21 : déterminer :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$$

Solution : 1) on a : $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 1} x^3+1 = 2$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} = +\infty$

$$2) \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\left(1 - \frac{1}{x} \right)^2}$$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^3} = 1$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3} \right)$$

on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3} \right)$

on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0$ et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = -\infty$

Exercice22 : calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$

Solution : on a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} 3x+1 = 4$

on a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + x - 2 = 0^+$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	$+$	0	$-$	0
				\oplus

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2} = +\infty$

Exercice23 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 5x^2 - 7x^4$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3}$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6}$ 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 3x + 2}$

Solution : 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 5x^2 - 7x^4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -7x^4 = -\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^4}{14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$

Exercice24 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$ 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$

Solution : 1)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3} = 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$ directement on trouve une

formes indéterminée : " $\frac{0}{0}$ "

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\frac{(\sqrt{x})^2}{2}} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cosh}{\frac{h^2}{2}} \right) = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$

(On pose $\sqrt{x} = h$)

3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$

On montre que : $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{x - \frac{\pi}{6}}$

On pose $x - \frac{\pi}{6} = h$) donc $x \rightarrow \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

Donc : $= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 2 \times 1 = 2$

Exercice25 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)}$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

Solution : 1) on pose : $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \left| \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right| \leq 1$ donc : $|f(x)| \leq x^2$ et on a

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ Alors : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$? on pose : $f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* |\cos x| \leq 1$ donc : $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|^3}$ et on a

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|^3} = 0$ Alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)}$? on pose : $f(x) = \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* -1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc :

$0 \leq \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x} \leq 2$ donc $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ Alors :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$? on pose : $f(x) = 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad 2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq \sqrt{x^4} \quad \text{cad } 2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq x^2$$

$$\text{donc : } \frac{1}{2 + \sqrt{x^4 + 1}} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{donc : } |f(x) - 1| \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\text{Et puisque : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0 \quad \text{Alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

Exercice26 : Soient les fonctions tels que :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2 + x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$$

1) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

3) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

1) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et $f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2 + x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x+1 = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2} -3x^2 + x = -10$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{5} \times (-10) = -10\sqrt{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ?$ et $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}+1 = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

- 2) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) ?$ et $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}+1 = \sqrt{3}+1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3} -2x^2+1 = -17 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0^+$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} x^2+1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty \quad \text{alors : } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$$

4) $k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$ donc : $D_k =]-\infty; 0[\cup]0; 2[\cup]2; +\infty[$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0} -3x+1 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^2-2x = 0$

Etude du signe de : $x^2 - 2x$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x(x-2)$	$+$	0	$-$	$+$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2x = 0^+$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} -3x+1 = -5 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 2x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x = 0^-$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = +\infty$$

Exercice27 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$ 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

Solution : 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x}-2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 2} x^2+3x-10 = 0$

on trouve une formes indéterminée : " $\frac{0}{0}$ "

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}{(x^2+3x-10)(\sqrt{2x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-4)}{(\sqrt{2x}+2)(x-2)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(\sqrt{2x}+2)(x+5)} \times \frac{1}{(x-2)} = \frac{2}{14} \end{aligned}$$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1} ?$

On a : $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

$$\text{Et } 2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = (x-1)(2x^2 + 5x + 1)$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 + 5x + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{8}{3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x \quad ?$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

on trouve une forme indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} \text{ or } x \rightarrow +\infty \text{ donc } |x| = x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{On pose } x - \frac{\pi}{4} = h \text{ donc } x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

$$\text{or : } \tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \times \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan h} \times \frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1} \times 1 = 2$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

