Suites numériques

Exercice 1

Calculer les trois premiers termes des suites suivantes :

1) $U_n = 2^n - n$ 2) $V_n = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$

3) $W_0 = 2 \ et \ W_{n+1} = \frac{2W_n + 1}{W_n + 2}$

4) $T_1 = 3 \ et \ T_n = \frac{1}{2}T_{n-1} + 2$

Exercice 2

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$U_0 = 4 \ et \ U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 3$

Montrer que $(U_n)_n$ est majorée par 5

Exercice 3

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$U_0 = -\frac{1}{2} \ et \ U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{2U_n + 3}$

1) montrer que $(U_n)_n$ est minorée par -1
2) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ U_n < 1$

Exercice 4

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$U_0 = -1 \ et \ U_{n+1} = \frac{9}{6 - U_n}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ U_n < 3$
2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$
3) on pose $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique

b) Déterminer U_n en fonction de n

Exercice 5

Soit $(U_n)_n$ une suite arithmétique telle que :

$U_3 = 5 \ et \ U_{11} = 29$

1) déterminer la raison r de la suite $(U_n)_n$
2) calculer la somme $S = U_0 + U_1 + ... + U_{11}$

Exercice 6

Soit la suite $(U_n)_n$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n} \end{cases}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ U_n < 2$
2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$
3) on pose $V_n = \frac{2}{U_n - 2}$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique

b) Déterminer U_n en fonction de n

c) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} V_k$ en fonction de n

Exercice 7

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$U_0 = 2 \ et \ U_{n+1} = 2U_n - 1$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ U_n > 1$
2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$
3) on pose $X_n = U_n - 1$

a) montrer que $(X_n)_n$ est une suite géométrique

b) déterminer U_n en fonction de n

c) calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$

Exercice 8

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$U_0 = -\frac{3}{4} \ et \ U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5}$

1) a) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ U_{n+1} = 1 - \frac{6}{2U_n + 5}$

b) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ -1 < U_n < -\frac{1}{2}$

2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$
3) on pose $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 1}$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique

b) déterminer U_n en fonction de n

4) a) montrer que :

$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \left|U_{n+1} + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{6}{7}\left|U_n + \frac{1}{2}\right|$

b) montrer par récurrence que :

$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \left|U_n + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{6}{7}\right)^n$