

SUITES NUMERIQUES - CORRECTIONExercice n°1

1) Si $u_n = \frac{n+2}{n^2-1}$ alors $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$. On définira donc la suite pour $n \geq 2$. Ainsi $u_3 = \frac{3+2}{3^2-1} = \frac{5}{8}$ et $u_8 = \frac{8+2}{8^2-1} = \frac{10}{63}$

2) Si $u_n = \sqrt{n^2 - 3n}$ alors $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ définie sur $]-\infty; 0] \cup [3; +\infty[$. On définira donc la suite pour $n \geq 3$. Ainsi $u_3 = \sqrt{3^2 - 3 \times 3} = \sqrt{0} = 0$ et $u_8 = \sqrt{8^2 - 3 \times 8} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

3) Si $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ alors $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)$ définie sur \mathbb{R} . On définira donc la suite pour $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi $u_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $u_8 = \cos\left(\frac{8\pi}{2}\right) = \cos(4\pi) = 1$

Exercice n°2

1) La suite de terme général $u_n = (-1)^n \sqrt{n}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $u_0 = (-1)^0 \sqrt{0} = 1 \times 0 = 0$, $u_1 = (-1)^1 \sqrt{1} = (-1) \times 1 = -1$ et $u_2 = (-1)^2 \sqrt{2} = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$

2) La suite de terme général $u_n = \frac{3^n}{2^n - 1}$ est définie si et seulement si $2^n - 1 \neq 0$. Or $2^n - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^n = 1 \Leftrightarrow n = 0$

$(u_n)_n$ n'est donc définie que pour $n \geq 1$. On calcule $u_1 = \frac{3^1}{2^1 - 1} = \frac{3}{2-1} = 3$, $u_2 = \frac{3^2}{2^2 - 1} = \frac{9}{4-1} = 3$ et $u_3 = \frac{3^3}{2^3 - 1} = \frac{27}{8-1} = \frac{27}{7}$

Exercice n°3 Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n^2 + n + 1$, alors

$$v_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 1 = \boxed{n^2 + 3n + 3}$$

$$v_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1) + 1 = n^2 - 2n + 1 + n - 1 + 1 = \boxed{n^2 - n + 1}$$

$$v_{2n} = (2n)^2 + 2n + 1 = \boxed{4n^2 + 2n + 1}$$

$$v_{3n-1} = (3n-1)^2 + (3n-1) + 1 = 9n^2 - 6n + 1 + 3n - 1 + 1 = \boxed{9n^2 - 3n + 1}$$

$$\text{Enfin, } v_{n+1} - v_n = n^2 + 3n + 3 - (n^2 + n + 1) = \boxed{2n + 2}$$

Exercice n°4

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \frac{1 + (-1)^{n+1} \frac{5}{2^{(n+1)-1}} - 1}{1 + (-1)^n \frac{5}{2^{n-1}} - 1} = \frac{(-1)^{n+1} \frac{5}{2^n}}{(-1)^n \frac{5}{2^{n-1}}} = (-1)^{n+1-n} \frac{5}{2^n} \times \frac{2^{n-1}}{5} = (-1)^1 \frac{5}{2^n} \times \frac{2^{n-1}}{5} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Le rapport $\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1}$ est bien indépendant de n .

Exercice n°5

1) La suite définie par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$ est donc définie par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ avec $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$

On calcule ainsi $u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 3 = \frac{1}{4}(-2) + 3 = -\frac{1}{2} + 3 = \boxed{\frac{5}{2}}$ puis $u_2 = \frac{1}{4}u_1 + 3 = \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} + 3 = \frac{5}{8} + 3 = \boxed{\frac{29}{8}}$ et enfin

$$u_3 = \frac{1}{4}u_2 + 3 = \frac{1}{4} \times \frac{29}{8} + 3 = \frac{29}{32} + 3 = \boxed{\frac{125}{32}}$$

2) La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$ est donc définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ avec $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

On calcule $u_1 = \sqrt{1+u_0^2} = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$, $u_2 = \sqrt{1+u_1^2} = \sqrt{1+(\sqrt{5})^2} = \sqrt{6}$ et $u_3 = \sqrt{1+u_2^2} = \sqrt{1+(\sqrt{6})^2} = \sqrt{7}$

Exercice n°6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule

$$\begin{aligned} u_{n+2} - 4(u_{n+1} - u_n) &= (n+2)2^{n+2} - 4((n+1)2^{n+1} - n2^n) \\ &= n2^{n+2} + 2 \times 2^{n+2} - \underset{=2^2}{4} n2^{n+1} - \underset{=2^2}{4} \times 2^{n+1} + \underset{=2^2}{4} n \times 2^n \\ &= n2^{n+2} + 2^{n+3} - n2^{n+3} - 2^{n+3} + n2^{n+2} \\ &= n2^{n+2} + n2^{n+2} - n2^{n+3} \\ &= 2n2^{n+2} - n2^{n+3} \\ &= n2^{n+3} - n2^{n+3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n)$

Exercice n°7

Compléter le tableau suivant pour n entier égal à 0, 1, 2, et 3

	v_0	v_1	v_2	v_3
$v_{n+1} = 4v_n - 3$	2	$v_1 = 4v_0 - 3 = 4 \times 2 - 3 = 5$	$v_2 = 4v_1 - 3 = 4 \times 5 - 3 = 17$	$v_3 = 4v_2 - 3 = 4 \times 17 - 3 = 65$
$v_{n+1} = (v_n - 1)^2$	4	$v_1 = (v_0 - 1)^2 = (4 - 1)^2 = 9$	$v_2 = (v_1 - 1)^2 = (9 - 1)^2 = 64$	$v_3 = (v_2 - 1)^2 = (64 - 1)^2 = 3969$
$v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$	1	2	$v_2 = 2v_1 - v_0 = 2 \times 2 - 1 = 3$	$v_3 = 2v_2 - v_1 = 2 \times 3 - 2 = 4$
$v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2}$	3	5	$v_2 = \frac{v_1 + v_0}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4$	$v_3 = \frac{v_2 + v_1}{2} = \frac{4 + 5}{2} = \frac{9}{2}$

Exercice n°8

1) $x + 2 \leq 3x + 3 \Leftrightarrow -1 \leq 2x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x$. $S = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

2) On remarque d'abord que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

De plus, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)+1}{3^{n+1}} = \frac{n+2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n+1} = \frac{n+2}{3(n+1)}$

On résout $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow \frac{n+2}{3(n+1)} < 1 \Leftrightarrow n+2 < 3n+3$

D'après la question précédente, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow n > -\frac{1}{2}$, ce qui est assuré puisque $n \in \mathbb{N}$

Ainsi $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, ceci entraîne $u_{n+1} < u_n$, et nous permet

d'affirmer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice n°9

1) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 4$, on calcule $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 4 - (2^n - 4) = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2 - 1) = 2^n$

Or pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $2^n > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

2) Si pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{0,75^n}{n^3}$, on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{0,75^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{0,75^n} = \frac{0,75^{n+1}}{(n+1)^3} \times \frac{n^3}{0,75^n} = 0,75 \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^3$

Or pour tout entier $n \geq 1$, $0 < \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow 0 < \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 < 1$ et puisque $0 < 0,75 < 1$, on en déduit que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Puisque

pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$, ceci entraîne $u_{n+1} < u_n$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante.

3) 1^{ère} méthode

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n^3 + n$, on calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1)^3 + (n+1) - (2n^3 + n) = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n+1) - 2n^3 - n \\ &= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 + n + 1 - 2n^3 - n = 6n^2 + 6n + 3 = 3(2n^2 + 2n + 1) \end{aligned}$$

Puisque le calcul du discriminant du polynôme $P(n) = 2n^2 + 2n + 1$ fournit $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 1 = -4 < 0$, on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

2^{ème} méthode

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n^3 + n = f(n)$ avec $f(x) = 2x^3 + x$, le sens de variation de f nous renseignera sur celui de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Or f est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$, donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} , et on retrouve bien le résultat : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

4) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-3)^n$, on peut affirmer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

En effet n pair $\Rightarrow u_n > 0$ et n impair $\Rightarrow u_n < 0$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est donc ni croissante ni décroissante

5) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1}$, il est préférable d'étudier la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

Puisque $n \in \mathbb{N}$, il suffit d'étudier f sur $[0; +\infty[$. Si on note $P(x) = x^2 + x + 1$, le calcul du discriminant fournit $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$, donc $P(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi la fonction f est définie sur \mathbb{R} . Elle est également dérivable sur \mathbb{R} car P l'est, et puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$. Puisque

l'on se restreint à $[0; +\infty[$, on peut affirmer que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $2x+1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

6) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\frac{1}{2+\sqrt{n}}$, il est préférable d'étudier la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2+\sqrt{x}}$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{(2+\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}$. Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

7) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - n$, on calcule :

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - (n+1) - (2^n - n) = 2^{n+1} - 2^n - n - 1 + n = 2^n(2-1) - 1 = 2^n - 1$$

Pour $n = 0$, $u_1 - u_0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ donc $u_1 = u_0$. Dès que $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = 2^n - 1 > 0$

Ainsi, mis à part $u_1 = u_0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir de $n \geq 1$

8) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{2^n}$,

$$\text{on calcule, pour tout } n \geq 1 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

Pour comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n}$ à 1, on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{n+1}{2n} - 1 = \frac{n+1}{2n} - \frac{2n}{2n} = \frac{1-n}{2n}$.

Or pour tout $n = 1$, $\frac{u_2}{u_1} - 1 = \frac{1-1}{2} = 0$, ce qui signifie que $u_1 = u_2$. De plus pour tout $n > 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{1-n}{2n} < 0$. Ainsi

pour tout $n > 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{2^n} \geq 0$, l'inégalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ équivaut à $u_{n+1} < u_n$.

Ainsi, mis à part $u_1 = u_2$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir de $n \geq 2$

9) Si pour tout $n \geq 1$, $u_n = -\frac{1}{n}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aura le même sens de variation que la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$f(x) = -\frac{1}{x}$. Cette fonction est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ (en tant qu'opposé d'une fonction strictement

décroissante sur $]0; +\infty[$), donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice n°10

1) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin \frac{2n\pi}{3}$, on calcule $u_0 = \sin \frac{2 \times 0 \times \pi}{3} = \sin 0 = 0$, $u_1 = \sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$u_2 = \sin \frac{2 \times 2\pi}{3} = \sin \frac{4\pi}{3} = \sin -\frac{2\pi}{3} = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } u_3 = \sin \frac{2 \times 3\pi}{3} = \sin 2\pi = 0.$$

Il semblerait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit périodique de période 3.

Pour le vérifier, on calcule, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = \sin \frac{2(n+3)\pi}{3} = \sin \left(\frac{2n\pi}{3} + \frac{2 \times 3\pi}{3} \right) = \sin \left(\frac{2n\pi}{3} + 2\pi \right) = \sin \left(\frac{2n\pi}{3} \right) = u_n$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique de période 3.

2) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = -\frac{3}{2}v_n^2 + \frac{5}{2}v_n + 1 \end{cases}$, on calcule $v_1 = -\frac{3}{2}v_0^2 + \frac{5}{2}v_0 + 1 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 1 = 2$, puis

$$v_2 = -\frac{3}{2}v_1^2 + \frac{5}{2}v_1 + 1 = -\frac{3}{2} \times 2^2 + \frac{5}{2} \times 2 + 1 = -6 + 5 + 1 = 0 \text{ et enfin } v_3 = -\frac{3}{2}v_2^2 + \frac{5}{2}v_2 + 1 = 1. \text{ On retombe sur } v_0 \text{ et il}$$

semblerait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit périodique de période 3.

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+3} = v_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons la division euclidienne de n par 3, et écrivons $n = 3q + r$ avec $0 \leq r < 2$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $v_n = v_r$ (où r est le reste de la division euclidienne de n par 3)

La propriété est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3$

Supposons là vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, c'est-à-dire $v_n = v_r$ (où r est le reste de la division euclidienne de n par 3),

et montrons que $v_{n+1} = v_s$ (où s est le reste de la division euclidienne de $n+1$ par 3)

Si $n = 3q + r$, $0 \leq r < 2$, alors $n+1 = 3q + r + 1$.

De trois choses l'une :

Si $n = 3q$, c'est-à-dire $r = 0$, alors $v_n = v_0$ (hypothèse de récurrence) donc

$$v_{n+1} = -\frac{3}{2}v_n^2 + \frac{5}{2}v_n + 1 = -\frac{3}{2}v_0^2 + \frac{5}{2}v_0 + 1 = v_1. \text{ Comme } n+1 = 3q+1, \text{ c'est-à-dire } s = 1, \text{ alors on pourra bien affirmer}$$

que $v_{n+1} = v_s$

Si $n = 3q + 1$, c'est-à-dire $r = 1$, alors $v_n = v_1$ (hypothèse de récurrence) donc

$v_{n+1} = -\frac{3}{2}v_n^2 + \frac{5}{2}v_n + 1 = -\frac{3}{2}v_1^2 + \frac{5}{2}v_1 + 1 = v_2$. Comme $n + 1 = 3q + 2$, c'est-à-dire $s = 2$, alors on pourra encore affirmer que $v_{n+1} = v_s$.

Si $n = 3q + 2$, c'est-à-dire $r = 2$, alors $v_n = v_2$ (hypothèse de récurrence) donc

$v_{n+1} = -\frac{3}{2}v_n^2 + \frac{5}{2}v_n + 1 = -\frac{3}{2}v_2^2 + \frac{5}{2}v_2 + 1 = v_3 = v_0$. Comme $n + 1 = 3q + 3 = 3(q + 1)$, c'est-à-dire $s = 0$, alors on pourra bien affirmer que $v_{n+1} = v_s$.

Dans tous les cas, $v_{n+1} = v_s$ (où s est le reste de la division euclidienne de $n + 1$ par 3)

La phase d'hérédité est achevée, et la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La périodicité de période 3 de la suite sur ses trois premiers termes entraîne donc sa périodicité de période 3 sur \mathbb{N} .

Exercice n°11

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constituée de deux sous-suites de rang pair et impair :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \frac{2^n}{3^{n+1}}$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^n}$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n} = \frac{2^n}{3^{n+1}}$. Il est évident que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{2(n+1)}}{u_{2n}} = \frac{u_{2n+2}}{u_{2n}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1+1}} \times \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{3} < 1$. Ainsi $\begin{cases} \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1 \\ v_n > 0 \end{cases} \Rightarrow v_{n+1} < v_n$ donc la (sous)-suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement

décroissante.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{2n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^n}$. Il est évident que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{2(n+1)+1}}{u_{2n+1}} = \frac{u_{2n+3}}{u_{2n+1}} = \frac{2^{n+1+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{2}{3} < 1$. Ainsi $\begin{cases} \frac{w_{n+1}}{w_n} < 1 \\ w_n > 0 \end{cases} \Rightarrow w_{n+1} < w_n$ donc la (sous)-suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

strictement décroissante.