Étude analytique du produit scalaire dans le plan

Pr. S. Lazaiz

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Exercice 1.
On considère les points $A(-2,0)$, $B(1,1)$ et $C(-1,3)$. Soit $M(x,y)$ un point du plan.

1. Écrire $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}$ en fonction de x et y.
2. Montrer que l'ensemble des points du plan tels que
$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = BA^2$$
est une droite (D) à déterminer.
3. Montrer que $(D) \perp (BC)$.

Exercice 2.
On considère les deux vecteurs $\vec{u}\,(1, \sqrt{a})$ et $\vec{v}\,(a,1)$ où $a \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que $a + \sqrt{a} \leq \sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a}$.
2. Déduire que $1 + \sqrt{a} \leq (1+a)\left(1+a^2\right)$.
3. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})$,
$$x + y \leq \left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)$$

Exercice 3.
A et B deux points du plan tels que $AB = 3$, I le milieu de $[AB]$ et $G = bar\left\{(A,1),(B,2)\right\}$

1. Soit (E) l'ensemble des points M tels que
$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 6$$
   (a) Montrer que $G \in (E)$.
   (b) Déterminer la nature de l'ensemble (E).
2. Soit (F) l'ensemble des points M tels que
$$MA^2 - MB^2 = 8$$
   (a) Vérifier que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$
   (b) Déduire la nature de l'ensemble (F).

Exercice 4.
On considère le cercle (C) défini par son équation cartésienne suivante :
$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

1. Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).
2. Déterminer les équations cartésiennes des deux droites tangentes au cercle parallèles à la droite (D) d'équation $2x - y + 2 = 0$.

Exercice 5.
On considère l'ensemble (C_m) définie par l'équation cartésienne
$$x^2 + y^2 - 2mx + (m+2)\,y - 3m - 4 = 0$$
tel que $m \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que (C_m) est un cercle en déterminant son centre et son rayon en fonction de m.
2. Déterminer (D) l'ensemble des centres des cercles quand m varie sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que tous ces cercles passent par deux points A et B fixes en les déterminant, puis vérifier que $(AB) \perp (D)$.
4. Trouver les cercles tangentes à la droite (Δ) d'équation $x + 2y + 2 = 0$.

Exercice 6.
On considère l'ensemble (C_m) définie par l'équation cartésienne
$$x^2 + y^2 - 2x - my = 0$$
tel que $m \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que (C_m) est un cercle en déterminant son centre et son rayon en fonction de m.
2. Montrer que le segment $[AB]$ tel que $A(2,0)$ et $B(0,m)$ est un diamètre du cercle (C_m).
3. Déterminer la valeur de m pour lequel la droite $(D) : y = -x$ soit tangente au cercle (C_m).
4. On suppose que dans la suite que $m = 2$
   (a) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C_2).
   (b) Soit M un point du plan. I, J et K sont les projections orthogonales du point M sur l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite (AB). Montrer que si I, J et K sont alignés alors $M \in (C_2)$.

Exercice 7.
On considère les points $A(1,1)$, $B\left(2+\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ et $C(6,-4)$ et H la projection orthogonale du point B sur la droite (AC).

1. (a) Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$.
   (b) Déduire que $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. (a) Calculer la distance AH, puis déduire $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}\right)$.
   (b) Déduire les coordonnées du point H.

Exercice 8.
On considère dans le plan le cercle (C) d'équation cartésienne
$$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$$

1. Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).
2. On considère la droite $(D_m) : y = x + m$ avec $m \in \mathbb{R}$.
   (a) Étudier l'intersection du cercle (C) et la droite (D_m).
   (b) Soit I_m le milieu du segment $[MM']$ tel que M et M' sont les points d'intersection du cercle (C) et la droite (D_m).
   Trouver les coordonnées du point I_m, puis déterminer l'ensemble des points I_m quand m varie sur $\mathbb{R}$.