PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$
Etude analytique (1)

I) BASE ET REPERE ORTHONORMES

Définitions : Soit $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ une base de V_2.

1) La base B est dite **orthogonale** si $\vec{i}.\vec{j}=0$

2) La base B est dite **normée si** $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1$

3) Une base orthogonale et normée s'appelle une base orthonormée.

4)Soit O un point du plan

Soit $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ un repère du plan $(\mathcal{P})$

On dit que le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé si la base $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$) associé à $\mathcal{R}$ est orthonormée.

On pose : $\vec{i}=\overrightarrow{0I}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{0J}$

II) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE.

Soit $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ une base orthonormée de V_2.

Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2 ; on a : $\vec{u}.\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)$

Et d'après la bilinéarité du produit scalaire on a :

$\vec{u}.\vec{v}=xx'\vec{i}\vec{i}+yy'\vec{j}\vec{j}$ car $\vec{i}.\vec{j}=0$

$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ puisque: $\left\|\vec{i}\right\|=1$ et $\left\|\vec{j}\right\|=1$

On a donc la propriété suivante :

Propriété : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$

Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2 ; on a :

1) $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$

2) $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$

3) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$

Si $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$ alors

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$

Exercice : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(1;-3)$ et $B(3;7)$ et $C(-3;1)$

1)Montrer que le triangle ABC est rectangle en C

2)Calculer la surface du triangle ABC

Solution : 1)

Methode1 **:** $\overrightarrow{BC}(-6;-6)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;4)$ et $\overrightarrow{AB}(2;10)$

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{2^2+10^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$

$AC=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

Puisque : $AC^2+BC^2=32+72=104$ et $AB^2=104$

Donc : $AC^2+BC^2=AB^2$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

Methode2 : $\overrightarrow{BC}(-6;-6)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;4)$

Donc : $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BC}=24-24+0$ Donc : $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

2)puisque le triangle ABC est rectangle en C alors :

$S=\frac{1}{2}CA\times CB=\frac{1}{2}4\sqrt{2}\times6\sqrt{2}=24$

Exercice :

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Considérons la droite (D): $2x-y+1=0$ et N un point sur la droite (D) d'abscisse α.

1- Déterminer les coordonnées de N.

2- Déterminer la distance ON.

3- Déterminer pour quelle valeur de α la distance ON est minimale.

III) PRODUIT SCALRE ET LIGNES TRIGONOMETRIQUES.

1) L'expression de *cos* :

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

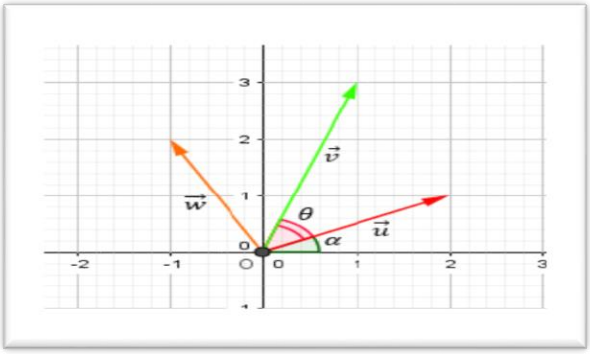
Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2 ; on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=xx'+yy'$

Par suite : $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

2) L'expression de sin :

2.1 L'écriture trigonométrique d'un vecteur.

L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$



$\vec{u}(x;y)$ et α la mesure da l'angle **polaire** $\left(\vec{i};\vec{u}\right)$

Puisque $\vec{i}(1;0)$ alors : $\vec{u}\cdot\vec{i}=x$ et puisque $\vec{j}(0;1)$ alors

$\vec{u}\cdot\vec{j}=y$ D'autre part: $\vec{u}\cdot\vec{i}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{i}\|\cos\left(\vec{u};\vec{i}\right)=\|\vec{u}\|\cos\alpha$

$$\vec{u}\cdot\vec{j}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{j}\|\cos\left(\vec{u};\vec{j}\right)=\|\vec{u}\|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{j}=\|\vec{u}\|\sin\alpha$$

On peut conclure que : $\begin{cases} x=\|\vec{u}\|\cos\alpha \\ y=\|\vec{u}\|\sin\alpha \end{cases}$

Et par suite: $\vec{u}=\|\vec{u}\|\cos\alpha\vec{i}+\|\vec{u}\|\sin\alpha\vec{j}=\|\vec{u}\|\left(\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}\right)$

Cette écriture s'appelle l'écriture trigonométrique du vecteur $\vec{u}$.

2.2 L'expression de sin :

$\vec{u}(x;y)$ et α la mesure da l'angle polaire $\left(\vec{i};\vec{u}\right)$

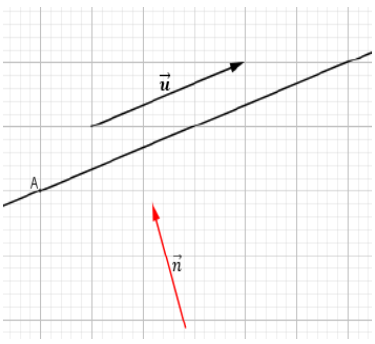
et $\vec{w}$ le vecteur tel que : $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$ et $\left(\vec{u};\vec{w}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

D'après l'écriture trigonométrique du vecteur $\vec{w}$

on a : $\vec{w}=\|\vec{w}\|\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\vec{i}+\|\vec{w}\|\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\vec{j}$

$$\vec{w}=-\|\vec{w}\|\sin\alpha\vec{i}+\|\vec{w}\|\cos\alpha\vec{j}=-\|\vec{u}\|\sin\alpha\vec{i}+\|\vec{u}\|\cos\alpha\vec{j}$$

(car : $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$) $\vec{w}=-y\vec{i}+x\vec{j}$



Par suite $\vec{w}(-y;x)$

D'où on peut conclure que :

$\vec{v}\cdot\vec{w}=-x'y+xy'$

et on a :

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cos\theta$$

où : $\left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv\theta[2\pi]$ Ce qui nous permet de confirmer que : $\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\sin\theta=-x'y+xy'$

et donc : $\sin\theta=\dfrac{xy'-x'y}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\dfrac{\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

Théorème : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$

$$\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

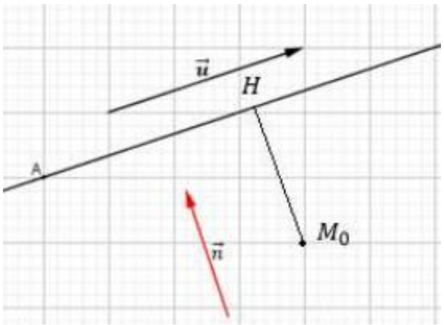
$$\sin\theta=\frac{xy'-x'y}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

Exercice: dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(5;0)$ et $B(2;1)$ et $C(6;3)$

1) Calculer $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2)en déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Solution : 1)



$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$ et

$\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$

et on a : $\overrightarrow{AB}(-3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;3)$

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=-3\times1+1\times3=-3+3=0$

$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-10$

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$ et $AC=\sqrt{10}$

$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{0}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=0$

$\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{-10}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=-1$

2) on a : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0$ et $AB=AC$ donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{-\pi}{2}[2\pi]$ car : $\left(\overline{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right)=\dfrac{-\pi}{4}[2\pi]$ et

$\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=-1$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right)[2\pi]$

$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=\dfrac{-\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]=-\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$

IV) DISTANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE.

1) Vecteur normal sur une droite.

Définition : Soit $D\left(A;\vec{u}\right)$la droite passante par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; tout vecteur $\vec{n}$ non nul et orthogonal à $\vec{u}$ s'appelle un vecteur normal sur la droite (***D***).

Remarque :

Si $\vec{n}$ est normal sur une droite (D) ; Tout Vecteur non nul colinéaire avec $\vec{n}$ est aussi Normal sur la droite (D).

Si (D): $ax + by + c = 0$ est une droite dans le plan alors $\vec{u}\left(-b;a\right)$) est un vecteur directeur de la droite (D), et le vecteur $\vec{n}\left(a;b\right)$ est non nul et orthogonal à $\vec{u}$ donc normal sur la droite (D).

2) Equation d'une droite définie par un point donné et un vecteur normal.

Soient $A\left(x_A;y_A\right)$ un point donné, et$\vec{v}\left(a;b\right)$un vecteur non nul. Soit (D) la droite qui passe par A et qui admet $\vec{v}$ comme vecteur normal.

$M\left(x;y\right)\in\left(D\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{v}=0\Leftrightarrow a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$

$\Leftrightarrow ax+by-\left(ax_A+by_A\right)=0$

Propriété : Soient $A\left(x_A;y_A\right)$ un point donné, et $\vec{n}\left(a;b\right)$un vecteur non nul. La (D) la droite qui passe par A et qui admet $\vec{n}$ comme vecteur normal a une équation cartésienne de la forme :

(D): $a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$

Exercice : déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par $A\left(0;1\right)$ et qui admet $\vec{n}\left(2;1\right)$ comme vecteur normal

Solution : on a (D) qui passe $A\left(0;1\right)$ et $\vec{n}\left(2;1\right)$ un vecteur normal donc : une équation cartésienne de la droite (D) est : $2\left(x-0\right)+1\left(y-1\right)=0$

donc : (D) : $2x+y-1=0$

Exercice :donner un vecteur normal a la droite (D) dans les cas suivants : 1)$\left(D\right):x-2y+5=0$

2)$\left(D\right):2y-3=0$ 3)$\left(D\right):x-1=0$

Solution : un vecteur normal a la droite (D) d'équation cartésienne : $ax+by+c=0$

Est $\vec{n}\left(a;b\right)$

1)$\left(D\right):x-2y+5=0$: $\vec{n}\left(1;-2\right)$ un vecteur normal

2) $\left(D\right):0x+2y-3=0$: $\vec{n}\left(0;2\right)$ un vecteur normal

2) $\left(D\right):1x+0y-1=0$: $\vec{n}\left(1;0\right)$ un vecteur normal

Exercice : dans Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A\left(-3;0\right)$et $B\left(3;0\right)$ et $C\left(1;5\right)$

1)déterminer une équation cartésienne

de la droite (D) perpendiculaire à la droite (AB)

passant par C

2)déterminer une équation cartésienne

de la droite (Δ) parallèle à la droite (AB)

passant par C

Solution : 1)soit M un point du plan ($\mathcal{P}$)

$M\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}\bullet\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow 6(x-1)-(y-5)=0$

$\Leftrightarrow 6x-y-1=0$

Donc : $(D):6x-y-1=0$

1)soit $M(x;y)$ un point du plan ($\mathcal{P}$)

$M\in(\Delta)\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}\bullet\vec{n}=0$

Avec $\vec{n}$ un vecteur normal a la droite (AB)

Le vecteur : $\overrightarrow{AB}(6,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et on a : $\vec{n}(1,6)$

On a donc : $M\in(\Delta)\Leftrightarrow(x-1)+6(y-5)=0$

$\Leftrightarrow x+6y-31=0$ Donc : $(\Delta):x+6y-31=0$

Exercice : dans Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ Considérons les points $A(1;2)$ et $B(-2;3)$ et $C(0;4)$

1)déterminer une équation cartésienne

de la droite (D) médiatrice du segment $[AB]$

2)déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Solution : 1) $(D)/ax+by+c=0$

Avec $\overrightarrow{AB}(a,b)$ un vecteur normal a (D)

$\overrightarrow{AB}(-3,1)$ donc : $(D)/-3x+y+c=0$

Or $I\in(D)$ I est le milieu du segment $[AB]$

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{-1}{2},\frac{5}{2}\right)$

Donc : $-3\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow c=-4$

Par suite : $(D)/-3x+y-4=0$

2) (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire a (BC) passant par A

Donc $\overrightarrow{BC}(2,1)$ un vecteur normal a (Δ) donc

$(\Delta)/2x+y+c=0$ et on a $A\in(\Delta)$ donc

$2\times1+2+c=0\Leftrightarrow c=-4$

$(\Delta)/2x+y-4=0$

Exercice : Considérons le triangle ABC où A (2,1) B (5,0) et C (7,6)

1- a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

b) En déduire les coordonnées du point Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

2) Déterminer les coordonnées du point G centre de gravité de ABC.

3) Déterminer les coordonnées du point H, orthocentre du triangle ABC.

4) Vérifier que les points Ω , G et H sont alignés

3) droites perpendiculaires

proposition : Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$

on considère les deux droites : $(D):ax+by+c=0$ et $(D'):a'x+b'y+c'=0$

$(D)\perp(D')\Leftrightarrow\vec{n}\perp\vec{n'}\Leftrightarrow aa'+bb'=0$

Avec $\vec{n}$ le vecteur normal de (***D***) et $\vec{n}'$ le vecteur normal de (***D'***)

Exercice :(D) $2x+3y-1=0$ et (D') $\frac{3}{2}x-y+4=0$

Etudier la position relative de (D) et (D')

Solution :

$\vec{n}(2;3)$ est un vecteur normal de (D)

$\vec{n'}\left(\frac{3}{2};-1\right)$ est un vecteur normal de (D')

$\vec{n}\bullet\vec{n'}=2\times\frac{3}{2}+3\times(-1)=3-3=0$ donc $\vec{n}\perp\vec{n'}$

donc $(D)\perp(D')$

4) Distance d'un point par rapport à une droite.

Définition : Soient (D) une droite et M_0 un point dans le plan. La distance du point M_0 à la droite (D) est la distance M_0H où H est la projection orthogonal de M_0 sur (D).On la note : $d(M_0;(D))$

Remarque : La distance d'un point M_0 à une droite (D) est la plus petite distance de M_0 à un point M de (D) $d(M_0;(D))=\min_{M\in(D)}(M_0M)$

Preuve : Soit la droite (D): $ax+by+c=0$ et $M_0(x_0;y_0)$;Soit H la projection orthogonale de M_0 sur (D), $\vec{n}(a;b)$ est normal sur (D).

On a pour tout point $A(x_A;y_A)$ de la droite(D) :

$$\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}=\left(\overrightarrow{M_0H}+\overrightarrow{HA}\right).\vec{n}=\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}+\overrightarrow{HA}.\vec{n}=\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}$$

Donc : $\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}=\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}$

On conclue que $\left|\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}\right|=\left|\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}\right|$ par suite

$\left\|\overrightarrow{M_0H}\right\|\left\|\vec{n}\right\|=\left|\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}\right|$ et finalement : $M_0H=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$

En passant à l'expression analytique :

$\vec{n}(a;b)$) et $\overrightarrow{M_0A}(x_A-x_0;y_A-y_0)$

par suite : $M_0H=\dfrac{\left|a(x_A-x)_0+b(y_A-y_0)\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$M_0H=\frac{\left|ax_A-ax_0+by_A-by_0\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$M_0H=\frac{\left|ax_A+by_A-ax_0-by_0\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Or $A\in(D)\Leftrightarrow ax_A+by_A+c=0$

$\Leftrightarrow ax_A+by_A=-c$

D'où $M_0H=\dfrac{\left|-c-ax_0-by_0\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Théorème : Soient la droite (D): $ax+by+c=0$ et $M_0(x_0;y_0)$ un point dans le plan.

La distance du point M_0 à la droite (D) est :

$$M_0H=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exercice : Soient la droite (D) d'équation :

$(D):3x+4y+5=0$

1)Déterminer les coordonnées du point H la projection orthogonale de O sur (D)

2)calculer La distance du point O à la droite (D)

3)Déterminer les coordonnées du point O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Solution : 1)puisque H est la projection orthogonale de O sur (D) alors H est le point d'intersection de la droite (D)et la droite (Δ) qui passe par O et perpendiculaire a (D) on va donc résoudre le système suivant : $\begin{cases}(D):3x+4y+5=0\\(\Delta):4x-3y=0\end{cases}$ On trouve :

$x=\dfrac{-3}{5}$ et $y=\dfrac{-4}{5}$ donc $H\left(\dfrac{-3}{5};\dfrac{-4}{5}\right)$

Autre méthode :Soit $H(x_H;y_H)$ on a

$H\in(D)\Leftrightarrow 3x_H+4y_H+5=0$

$\overrightarrow{OH}$ est normal a la droite (D) donc colinéaire avec $\vec{u}(3;4)$ Donc : $\exists k\in\mathbb{R}/\overrightarrow{OH}=k\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=3k\\y_H=4k\end{cases}$

Pour déterminer x_H et y_H on va donc résoudre le système suivant : $\begin{cases}(1)\,x_H=3k\\(2)\,y_H=4k\\(3)\,3x_H+4y_H+5=0\end{cases}$

On remplace (1) et (2) dans (3) on trouve :

$k=\dfrac{-1}{5}$ Donc : $\begin{cases}x_H=\dfrac{-3}{5}\\y_H=\dfrac{-4}{5}\end{cases}$

2) $d(O;(D))=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\left|3\times0+4\times0+5\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{5}{5}=1$

3) O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Donc H est le milieu du segment $[OO']$

Donc : $\overrightarrow{O'H}=-\overrightarrow{OH}$ on pose : $O'(x;y)$

Donc : $\begin{cases}\dfrac{-3}{5}-x=\dfrac{3}{5}\\\dfrac{-4}{5}-y=\dfrac{4}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{6}{5}\\y=-\dfrac{8}{5}\end{cases}$ Donc : $O'\left(-\dfrac{6}{5};-\dfrac{8}{5}\right)$

Exercice : Considérons la parabole d'équation :

(P): $y=x^2$ et la droite (D): $y=x-1$

1- Tracer la droite (D) et la parabole (P).

2- Soit $N\alpha$ un point d'abscisse α et varie sur la parabole (P)

a) Déterminer en fonction de α la distance $d(N\alpha,(D))$.

b) Pour quelle valeur de α la distance $d(N\alpha,(D))$ est minimale.

V) L'INTERPRETATION ANALYTIQUE DE L'INEGALITE DE CAUCHY-SCHWARZ

Activité 1: Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et le trinôme $f(x)=(x\vec{u}+\vec{v})^2$

1- Développer $f(x)$.
2- Déterminer le signe de $f(x)$.
3- Déterminer le discriminant de $f(x)$.
4- en déduire que pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :
$\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

5- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Activité 2 : On sait que pour trois points donnés dans le plan on a : $MA + MB \geq AB$ le but de cette activité c'est de démontrer ce résultat.

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

1- Développer $(\vec{u}+\vec{v})^2$

2- En utilisant l'inégalité précédente montrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

3- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

a)Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :
$\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

b) l'égalité est vérifiée si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

L'inégalité triangulaire.

a) Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :
$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

b) l'égalité est vérifié si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

Propriétés : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B(\vec{i};\vec{j})$ Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ on a

1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz
$\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow$

$xx'+yy' \leq |xx'+yy'| \leq \sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{x'^2+y'^2}$

2) L'inégalité triangulaire.
: $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow$
$\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x'^2+y'^2}$

Exercice: dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ Considérons les points $A(1;-1)$ et $B(4;-1)$ et $C(-2;2)$

1) Calculer : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ et $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

2)en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

3)Calculer la surface du triangle ABC
4)déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A
5)déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

Solution :1) on a : $\overrightarrow{AB}(3;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-3;3)$

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC} = 3\times(-3)+0\times3 = -9$

$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$

2)soit α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ on a :

$\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$ et $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2+0^2} = 3$ et $AC = 3\sqrt{2}$

Donc : $\cos\alpha = \dfrac{-9}{9\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha = \dfrac{9}{9\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$

3) on a : $S = \dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\right| = \dfrac{9}{2}cm^2$

4)soit (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire a (BC) passant par A

Donc $\overrightarrow{BC}(-6,3)$ un vecteur normal a (Δ) donc

$(\Delta)/-6x+3y+c=0$ et on a $A(1;-1)\in(\Delta)$ donc

$-6\times1-3+c=0 \Leftrightarrow c=9$

$(\Delta)/-6x+3y+9=0$ donc : $(\Delta)/2x-y-3=0$

4)soit (D) la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

Pour Chaque point $M(x,y)$ de la droite (D)

On a : $d(M;(AB)) = d(M;(AC))$

D'où $\dfrac{|y+1|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \dfrac{|x+y|}{\sqrt{0^2+1^2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}|y+1| = |x+y|$

On remarque que (D) se trouve dans le demi plan tel que : $\begin{cases} y+1\geq 0 \\ x+y\geq 0 \end{cases}$ donc : $\sqrt{2}(y+1) = x+y$

donc : l'équation cartésienne de (D) est :

$\begin{cases} x+\left(1-\sqrt{2}\right)y-\sqrt{2}=0 \\ y+1\geq 0 \end{cases}$ (D) est un demi droite

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien