BARYCENTRE

I) ACTIVITES

Activité 1 : Sur une barre rigide de poids négligeable et de longueur $1m$ on considère deux boules métalliques de 500 g en A et de 350 g en B. M un point sur la barre. Déterminer la position de M sachant que le système et en équilibre.

Activité 2 : Soit ABC un triangle rectangle en A et $AC = 2AB$.

1- Montrer qu'il existe un et un seul point G tel que : $2\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

2- Tracer le point G.

3- Si le plan est rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)$ où I est milieu de $[AC]$, quels seront les coordonnées du point G.

Activité 3 : Soit $\left(A_i\right)_{1\le i\le 4}$ une famille de 4 points, et $\left(\alpha_i\right)_{1\le i\le 4}$ 4 réels dont la somme est non nulle.

Montrer que l'application :

$f:P\to V_2$ tel que : $f\left(M\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$

Est une bijection

(L'application f s'appelle l'application de Leibniz)

(Wilhelm Leibniz 1646-1716)

II) DEFINITIONS ET PROPRIETES :

1) Vocabulaires

Définitions : Soit A un point et α un réel non nul ; le couple (A, α) s'appelle un point pondéré.
Plusieurs points pondérés constituent un système pondéré

2) Barycentre de deux points pondérés.

2.1 Définitions.

Propriété : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$
l'application $f_2:P\to V_2$ tel que :
$f_2\left(M\right)=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$ est une bijection et il existe un et un seul point G qui vérifie $f_2\left(G\right)=\vec{0}$

Preuve : f_2 est l'application de Leibniz pour deux points

Définition : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré tel que $\alpha + \beta \neq 0$; le barycentre du système pondéré Σ est le point G qui vérifie :
$\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$
On écrit : $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

2.2 Propriétés de barycentre de deux points pondérés.

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$
et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ On a donc :
$\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$
et par suite : pour tout réel k non nul on a :
$k\alpha\overrightarrow{AG}+k\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$
et donc $G = Bar\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$.

Propriété :

a)Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

b)Si $\alpha = \beta$ le barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ s'appelle l'isobarycentre de A et B qui n'est que le milieu du segment $[AB]$.

Construction :

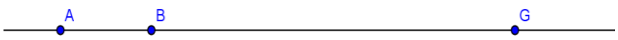
- **Exemple1 :** Construire $G = Bar\{(A, 4); (B, -5)\}$

$G = Bar\{(A, 4); (B, -5)\}$ donc : $4\overrightarrow{AG}-5\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

$4\overrightarrow{AG}+5\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow -4\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=5\overrightarrow{AB}$

Donc le point $G\in\left(AB\right)$



- **Exemple2 :**

Construire $G = Bar\{(A, \sqrt{8}); (B, -\sqrt{2})\}$

$G = Bar\{(A, \frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{8}); (B, \frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(-\sqrt{2}\right))\}$

donc : $G = Bar\{(A, 2); (B, -1)\}$

- Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ On a donc par suite :
$\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$
soit M est un pont quelconque dans le plan $\left(P\right)$
on a donc :
$\alpha\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MG}\right)+\beta\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MG}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\alpha+\beta\right)\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

d'où : on conclut que : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$

Propriété : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$
et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$. Pour tout point M du plan (P) on a : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$
ou $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$
Cette propriété s'appelle la propriété caractéristique du barycentre.

Propriété : Si $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ alors les points A, B et G sont alignés.

Preuve : Il suffit d'utiliser la propriété précédente en posant A = M dans la propriété :
On aura : $\overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
D'où les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et par suite : les points A, B et G sont alignés.

Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ des points du plan et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a :
$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$
et donc on a les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{a+b} \end{cases}$$

Preuve : (Il suffit d'utiliser la propriété caractéristique du barycentre en posant A = O)

Exemples : 1)Dans le plan (P) rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(3;2)$ et $B(4;1)$
Et soit $G = Bar\ \{(A, 1); (B, -5)\}$

Solution : on a : $\begin{cases} x_G = \dfrac{-x_A+5x_B}{4} \\ y_G = \dfrac{-y_A+5y_B}{4} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_G = \dfrac{17}{4} \\ y_G = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

Donc : $G\left(\frac{17}{4};\frac{3}{4}\right)$

Exercice1 : soit ABC un triangle et soit :
$I = Bar\ \{(B, 4); (C, -3)\}$
Déterminer les coordonnées du point I dans le repère $R(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

Solution : on a : donc $(4+(-3))\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
donc $\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ donc dans le repère $R(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ $I(4;-3)$

Exercice2 : E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF}$ et $E \notin (AB)$ et G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$
1)Montrer que G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$
2) en déduire que les droites (EF) et (AB) se coupent et déterminer le point d'intersection

solution : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{GF} \Leftrightarrow -1\overrightarrow{EG} - 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$

$-\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$ donc G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$
2) on a G le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$ donc $G \in (EF)$ et on a G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$ donc $G \in (AB)$
Donc les droites (EF) et (AB) se coupent en G

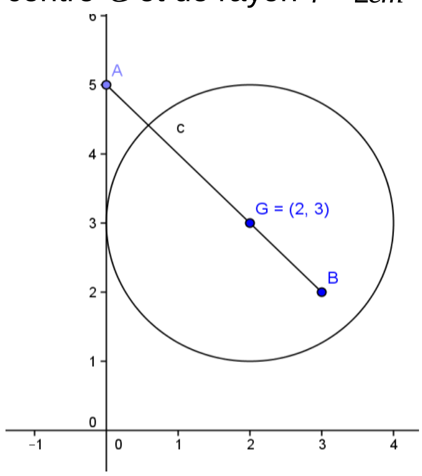
Exercice3 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(0;5)$ et $B(3;2)$
Et soit $G = Bar\ \{(A, 1); (B, 2)\}$
1)Déterminer les coordonnées de G
2)Déterminer et dessiner l'ensemble suivant :
$(C) = \left\{M \in (P) / \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 6\right\}$

Solution : $\begin{cases} x_G = \dfrac{0+6}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{5+4}{3} = 3 \end{cases}$ donc $G(2;3)$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 6cm \Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 6cm$

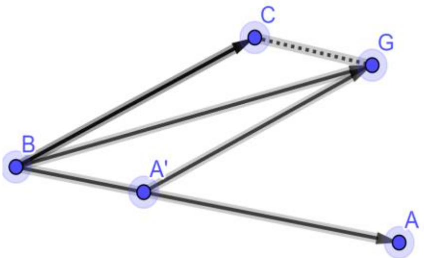
$\Leftrightarrow |3|\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 6cm \Leftrightarrow 3MG = 6cm \Leftrightarrow MG = 2cm$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r = 2cm$

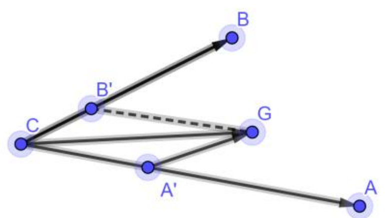


3) Barycentre de trois points pondérés

Propriété :
Soit $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ l'application :
$f_3 : P \to V_2$ tel que : $f_3(M)=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$
est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $f_3(G)=\vec{0}$
c'est à dire : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
Preuve : f_3 est l'application de Leibniz pour trois points
Propriété : Soit $\Sigma=\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$
et $G=Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$
si M est un pont quelconque dans le plan (P)
on a : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$
donc : $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$
Preuve : Même démonstration que dans le cas précèdent.
Construction :
• **Exemple :**
1°Construire $G=Bar\{(A,1);(B,-1);(C,3)\}$
$G=Bar\{(A,1);(B,-1);(C,3)\}$donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$(1+(-1)+3)\overrightarrow{MG}=1\overrightarrow{MA}+(-1)\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$
On pose : $M=B$ on aura :
$3\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$



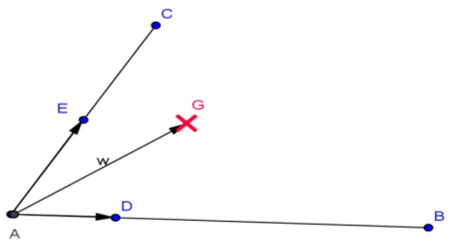
2°Construire $G=Bar\{(A,4);(B,1/2);(C,-3)\}$
Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$(4+1/2-3)\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MA}+1/2\,\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$
On pose : $M=C$ on aura :
$\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}=4\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CG}=\frac{8}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$



Exercice 4 : Soit ABC un triangle et G point tel que : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$
1)montrer que G le barycentre de :
$\{(A,1);(B,1);(C,2)\}$ et construire le point G
Solution : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
Donc G le barycentre de : $\{(A,1);(B,1);(C,2)\}$
On a :® $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$
Donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: donc $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{4}\overrightarrow{AC}$

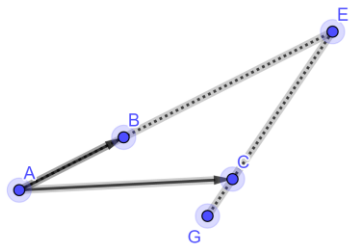


Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ des points du plan
et $G=Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$
on a : $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$
et donc on a les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{cases}$$

Propriété :
Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul :
$Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)=$
$Bar\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$ pour $k\neq 0$
Exercice :
Soit $G=Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ où $\alpha+\beta\neq 0$ et $G'=Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$
Montrer que $G=Bar\{(G',(\alpha+\beta));(C,\gamma)\}$
Propriété :
Si $G=Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)$ avec $\alpha+\beta\neq 0$
et $G'=Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$
Alors : $G=Bar\{(G',(\alpha+\beta));(C,\gamma)\}$
Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

Exercice 5 : on utilisant La propriété d'associativité Construire le barycentre G du système pondéré {(A, 2); (B, -3); (C, 5)}
Solution : soit E = Bar{(A, 2); (B, -3)}
d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $-\overrightarrow{ME}=2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}$
On pose : $M=A$ on aura : $-\overrightarrow{AE}=-3\overrightarrow{AB}$
Donc : $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}$
d'après la Propriété d'associativité on a :
G = Bar{(E, -1); (C, 5)}
d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $4\overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MC}$
On pose : $M=E$ on aura :
$4\overrightarrow{EG}=5\overrightarrow{EC}\Leftrightarrow\overrightarrow{EG}=\frac{5}{4}\overrightarrow{EC}$



Cas particulier
Si les poids α; β et γ sont égaux le barycentre de {(A, α); (B, α); (C, α)}
S'appelle **le centre de gravité** du triangle ABC.
Exercice 6 : Soit ABC un triangle.et G le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu du segment $[BC]$. Monter que G est le centre de gravité de $(A;1)$ et $(I;2)$
Solution : G le centre de gravité du triangle ABC
Donc G est le barycentre de :
{(A, 1); (B, 1); (C, 1)}
I le milieu du segment $[BC]$ Donc I est le barycentre de : { (B, 1); (C, 1)}
D'après la Propriété d'associativité on a :
G est le barycentre de : { (I, 2); (A, 1)}
Exercice7 : Soit ABC un triangle. Pour tout point M on pose :$\vec{V}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$
1) Réduire l'écriture de $\vec{V}$ et monter que $\vec{V}$ ne dépend pas du point M
2) soit K = Bar{(C, -3); (B, 1)} montrer que : $\vec{V}=2\overrightarrow{KA}$
3) soit G= Bar{(A, 2); (B, -1); (C, -3)}
montrer que : Pour tout point M on a :
$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{GM}$
4) en déduire l'ensemble des points M tel que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$
Solution : 1)
$\vec{V}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$
$\vec{V}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc $\vec{V}$ ne dépend pas du point M
2)on a : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ Pour tout point M donc si $M=K$ on aura :
$2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

Et on a : K = Bar{(C, -3); (B, 1)} donc : $\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

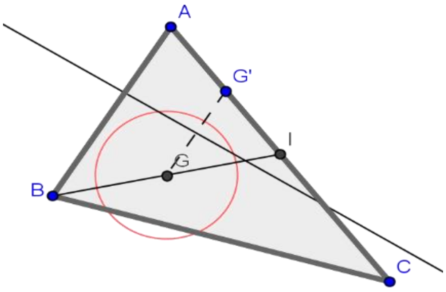
Donc : $2\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc : $2\overrightarrow{KA}=\vec{V}$

3) d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\left(2+(-1)+(-3)\right)\overrightarrow{MG}=-2\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{GM}$

4) $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$
$\Leftrightarrow\left\|2\overrightarrow{GM}\right\|=\left\|2\overrightarrow{KA}\right\|\Leftrightarrow 2GM=2KA\Leftrightarrow GM=KA$
Donc l'ensemble des points est le cercle (C) de centre G et de rayon $r=KA$
Exercice 8 : Soit ABC un triangle tel que :
$AC=6cm$ et $AB=5cm$ et $BC=4cm$
a) Construire G le barycentre de :
{(A, 1); (B, 2); (C, 1)}
b) Déterminer et Construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AC$
c) Déterminer et Construire l'ensemble (F) des points M du plan tel que :
$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}\right\|$
Solution : G est le barycentre de :
{(A, 1); (B, 2); (C, 1)} donc G est le barycentre de : {(B, 2); (I, 2} d'après La propriété d'associativité du barycentre
Donc G est le milieu du segment $[BI]$
b) D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\|=AC\Leftrightarrow GM=\frac{AC}{4}=1.5$
Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r=1.5cm$

b) Soit G' est le barycentre de :
{(A, 3); (C, 1)} Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\forall M\in(P)$
$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$ et $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG'}$
Donc : $M\in(F)\Leftrightarrow 4MG=4MG'\Leftrightarrow MG=MG'$
Donc : (F) est la médiatrice du segment $[GG']$

Et pour construire le point G' on a : $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



5) Barycentre de quatre points pondérés

Propriété :
Soit $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ l'application : $f_4 : P \to V_2$ tel que :

$$f_4(M)=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}$$

Est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $f_4(G)=\vec{0}$

c'est à dire : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Preuve : f_4 est l'application de Leibniz pour quatre points

Propriété :
Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$
si M est un point quelconque dans le plan (P)

on a : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{s}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{s}\overrightarrow{MB}+\frac{\gamma}{s}\overrightarrow{MC}+\frac{\delta}{s}\overrightarrow{MD}$

où $s=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

Preuve : Même démonstration que dans les cas précédents.

Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ et $D(x_D;y_D)$ des points du plan
$G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

on a : $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{s}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{s}\overrightarrow{OB}+\frac{\gamma}{s}\overrightarrow{OC}+\frac{\delta}{s}\overrightarrow{OC}$

Et donc on a les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{s} \\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{s} \end{cases}$$

où $s=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

Propriété : Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre

Non nul : $Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\} = Bar\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma); (D, k\delta)\}$
pour $k \neq 0$

Propriété : Si $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$
avec $\alpha + \beta \neq 0$ et $\gamma + \delta \neq 0$
Si $G' = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$
et $G'' = Bar\{(C, \gamma); (D, \delta)\}$
Alors $G = Bar\{(G', (\alpha + \beta)); (G'', \gamma + \delta)\}$

Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de quatre points pondérés.

Exercice9 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(-1;1)$ et $B(0;2)$ et $C(1;-1)$ et $D(1;0)$ Et soit $G = Bar\{(A, 1); (B, 2)\}$

1)Déterminer les coordonnées de
K = $Bar\{(A, 2); (B, 3)\}$

2)Déterminer les coordonnées de L le centre de gravité du triangle ABC

3)Déterminer les coordonnées de Barycentre des points $(A;2)$ et $(B;3)$ et $(C;1)$ et $(D;-1)$

Solution :1) $\begin{cases} x_K=\dfrac{-2+0}{5}==\dfrac{-2}{5} \\ y_K=\dfrac{2+6}{5}=\dfrac{8}{5} \end{cases}$ donc $K\left(-\frac{2}{5};\frac{8}{5}\right)$

2) les coordonnées de L sont :

$$\begin{cases} x_L=\dfrac{1x_A+1x_B+1x_C}{1+1+1} \\ y_L=\dfrac{1y_A+1y_B+1y_C}{1+1+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L=\dfrac{1\times(-1)+1\times0+1\times1}{1+1+1}=0 \\ y_L=\dfrac{1\times1+1\times2+1\times(-1)}{1+1+1}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Donc $L\left(0;\frac{2}{3}\right)$

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C+dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C+dy_D}{a+b+c+d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{2\times x_A+3\times x_B+1\times x_C+(-1)\times x_D}{5}=\dfrac{-2}{5} \\ y_G=\dfrac{2\times y_A+3\times y_B+1\times y_C+(-1)\times y_D}{5}=\dfrac{7}{5} \end{cases}$$

$G\left(-\frac{2}{5};\frac{7}{5}\right)$

Application :$ABCD$ un rectangle tel que : $AB = 2BC$ Construire le barycentre du système pondéré $\{(A, -2) ; (B, 3) ; (C, 1) ; (D, 1)\}$

Cas particulier : Si les poids α ; β et γ sont égaux le barycentre de :
$\{(A, \alpha) ; (B, \alpha) ; (C, \alpha) ; (D, \delta)\}$ s'appelle **le centre de gravité** du quadrilatère convexe $ABCD$

Exercice10 : soit $ABCD$ un quadrilatère convexe
Soit H le barycentre du système pondéré
$\{(A, 2) ; (B, 5); (C, -1) \}$
Soit K le barycentre du système pondéré

{(B, 5) ; (C, -1) ; (D, 6)}
Soit E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)}
1)Montrer que $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et Construire E
2) Montrer que H est le barycentre du système pondéré {(A, 1) ; (E, 2)} et Construire H
3) Montrer que K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}
4) a) Montrer que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}
b) en déduire que $(AK) \parallel (DH)$

Solution :1)on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a : $\overrightarrow{ME} = \frac{1}{4}\left(5\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right)$

Pour : M=B on a : $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et on peut Construire E

2) on a : E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)} et $5 + (-1) = 4$
D'après La propriété d'associativité on a H le barycentre du système pondéré {(A, 2); (E, 4) } et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que H est le barycentre du système pondéré {(A, 1) ; (E, 2)}
on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overrightarrow{MH} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MA}\right)$$

Pour : M=A on a : $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et on peut Construire E

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre du système Pondéré {(D, -6); (E, 4) }
Et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}
4) a) Montrons que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)} ?
Puisque K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}
Pour tout point M du plan (P) on a :

$$-\overrightarrow{MK} = -3\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{ME}$$

Donc : $3\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{ME}$
Donc : D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}

4) b) Pour tout point M du plan (P) on a :
$3\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MA}$ et $3\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MK}$
Donc : : $3\overrightarrow{DH} = 3\overrightarrow{MH} - 3\overrightarrow{MD}$
$3\overrightarrow{DH} = 3\left(\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MD}\right)$
Donc : $3\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MK}$
Donc : $(AK) \parallel (DH)$: Donc $3\overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AK}$

Exercice11 : ABC un triangle
I et J et K points tels que : $2\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{BC}$
Et $8\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA}$ et $5\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB}$
1) Montrer que I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$
2) le plan (P) est rapporté au repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$
a)Déterminer les coordonnées du point J
b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK)
c) Montrer que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BI} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BI} - \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}\right)$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BI} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{BI} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

Donc : $\frac{1}{2}\overrightarrow{BI} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CI} = \vec{0}$ par suite : I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) dans le repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ on a : $A(0;0)$ et $B(1;0)$ et $C(0;1)$
a)on a : $8\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA}$ donc : $8\overrightarrow{CA} + 8\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{CA}$
donc : $8\overrightarrow{AJ} = -7\overrightarrow{CA}$ donc : $\overrightarrow{AJ} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AC}$ donc : $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

b) la droite (IK) passe par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{IK}$ et on a : I est le barycentre de $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$ donc :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{\frac{1}{2}\times 1 - \frac{3}{2}\times 0}{-1} = -\dfrac{1}{2} \\ y_I = \dfrac{\frac{1}{2}\times 0 - \frac{3}{2}\times 1}{-1} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Donc : $I\left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right)$

Et on a : $5\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB}$ Donc : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

Donc : $K\left(\frac{2}{5};0\right)$ Donc : $\overrightarrow{IK}\left(\frac{9}{10};\frac{3}{2}\right)$

L'équation cartésienne de la droite (IK) est :

$$\frac{3}{2}x - \frac{9}{10}y + c = 0$$

$I \in (IK)$: donc : $\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{10}\left(\frac{3}{2}\right)+c=0$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}-\frac{27}{20}+c=0 \Leftrightarrow c=\frac{21}{10}$

donc : (IK): $\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+\frac{21}{10}=0$

$(IK): 15x-9y+21=0$

c) pour Montrer que les points I et J et K sont alignés il suffit de montrer que $J \in (IK)$

on a : $(IK): 15x-9y+21=0$ et $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

et on a : $15\times 0-9\frac{7}{8}+21=-21+21=0$

par suite : $J \in (IK)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice12 : ABC un triangle et I un point tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et K le symétrique de A par rapport a C et J le milieu du segment $[BC]$

1) exprimer I et J et K comme le barycentre de points pondérés a déterminer

2)quelle est le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;2)$; $(B;-2)$ et $(C;-2)$?

3)Monter que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1)

• on a J le milieu du segment $[BC]$

Donc : J est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$

• on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{IB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ Donc : I est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$

• on a : K le symétrique de A par rapport a C

Donc : $2\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{KA}$

Donc : $\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$

2) on a : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$ donc :

$1\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$ et $(B;-2)$ et $(C;-2)$

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre des points pondéré $(J;-4)$ et $(I;3)$ par suite : $K \in (IJ)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice13: ABCD un carré et I et J les milieux respectivement des segments $[BC]$ et $[CD]$ et M et N deux points tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

1determiner le barycentre des points pondérés {(A, 3) ; (B, 1)} et {(A, 3) ; (D, 1)}

2)soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$;$(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$

3)Monter que les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G

Solution :1)on a : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$

donc : $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Donc : M est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(B;1)$

De même on a : $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{ND}$

donc : $3\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

Donc : N est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(D;1)$

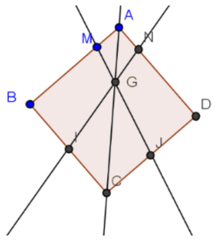
2) soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$;$(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$ et puisque J le milieu du segment $[DC]$ alors J est le barycentre des points pondéré $(C;1)$ et $(D;1)$

D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(M;4)$ et $(J;2)$ par suite : $G \in (JM)$

De même on a : I le milieu du segment $[BC]$ alors I est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et d'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(N;4)$ et $(I;2)$ par suite : $G \in (NI)$

Soit H le centre de gravité du triangle BCD donc H est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et $(D;1)$ par suite D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(H;3)$ donc : G le milieu du segment $[AH]$ et puisque ABCD est un carré alors : $H \in [AC]$ donc $G \in (AC)$

Conclusion : les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G



Exercice14: A et B deux points tel que : $AB = 4cm$ et soit : (F) l'ensemble des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB} = 3$

1)montrer que : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0$

2)soit G le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;3)$ et K le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;-3)$

a) Montrer que : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{MK} = 0$

b) En déduire l'ensemble (F) et le tracer

Solution :1) $M \in (F) \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA = 3MB$

$M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0$

2)a) $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) = 0$

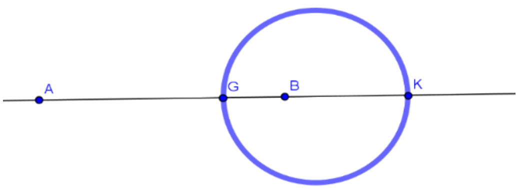
et d'après La propriété caractéristique du barycentre on aura :

$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MK}$

Donc : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow -8\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MK} = 0$

Donc : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MK} = 0$

2)b) d'après a) en déduit que (F) est le cercle de dont un diamètre est $[GK]$



Exercice15: A et B deux points tel que : $AB = 4cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1)soit : (E) l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB} = 4$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;3)$

a)montrer que : $H \in (E)$

b)vérifier que : $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$

c)déterminer la nature de l'ensemble (E)

2)soit : (F) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 - MB^2 = 8$

a) Montrer que : $\forall M \in (P)$ on a : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB}$

b) En déduire que $(F) = (E)$ et le tracer

Solution :1)on a : H le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;3)$ donc : $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AH}$ donc $\overrightarrow{IH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ par suite $\overrightarrow{IH} \bullet \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}AB^2 = 4$

Donc $H \in (E)$

b) $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH} \bullet \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IH}) \bullet \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$

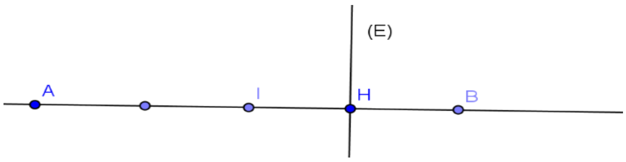
c)de b) on déduit que (E) est la droite perpendiculaire a (AB) en H

2)a) $MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB}$

car d'après La propriété caractéristique du barycentre on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

2)b) $M \in (F) \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 8 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow M \in (E)$

Donc $(F) = (E)$ par suite (F) est la droite perpendiculaire a (AB) en H



Solution16 : A et B deux points tel que : $AB = 3cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1)soit : (C) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = 9$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;3)$

a)monter que : $M \in (C) \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$

b)déterminer la nature et tracer l'ensemble (C)

2)soit : (C') l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = \frac{-5}{4}$

a)Montrer que : $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

b)déterminer la nature et tracer l'ensemble (C')

Solution :1)on a :

$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$= 2MI^2 + 2IA^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

Car : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$

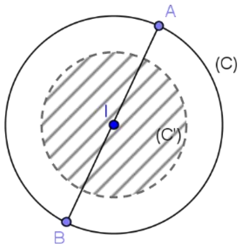
$M \in (C) \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 9 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$

b)en déduit que (C) est le cercle de centre I et de rayon $r = \frac{3}{2}$

2) a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

Donc : $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

2) b) en déduit que (C') est le cercle de centre I et de rayon $r = 1$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien