

BARYCENTRES - CORRECTION

Exercice n°1

1) L'égalité vectorielle $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ traduit exactement le fait que G est le barycentre du système $\{(A,2);(B,3)\}$ (c'est la définition !)

2) L'égalité vectorielle $\overrightarrow{GA} = -5\overrightarrow{GB}$ est équivalente à $\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ qui traduit exactement le fait que G est le barycentre du système $\{(A,1);(B,5)\}$

3) L'égalité vectorielle $\overrightarrow{AG} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB}$ se transforme successivement en :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{GB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \frac{1}{5}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) - \overrightarrow{GB} &= \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{5}\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GB} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \frac{6}{5}\overrightarrow{AG} - \frac{4}{5}\overrightarrow{GB} &= \vec{0} \Leftrightarrow 5\left(\frac{6}{5}\overrightarrow{AG} - \frac{4}{5}\overrightarrow{GB}\right) = 5 \times \vec{0} \\ \Leftrightarrow 6\overrightarrow{AG} - 4\overrightarrow{GB} &= \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(6\overrightarrow{AG} - 4\overrightarrow{GB}) = \frac{1}{2}\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \end{aligned}$$

qui traduit exactement le fait que G est le barycentre du système $\{(A,-3);(B,-2)\}$

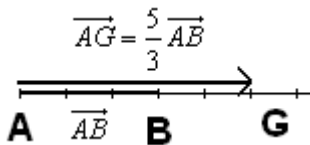
Exercice n°2 Si K est le barycentre d'un système de points pondérés (C,1),(B,-4), alors on peut écrire :

$\overrightarrow{KC} - 4\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$, qui traduit le fait que B est le barycentre du système $\{(K,3);(C,1)\}$

Exercice n°3 1) G barycentre de $\{(A,-2);(B,5)\}$ signifie que :

$$\begin{aligned} -2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow -2\overrightarrow{GA} + 5(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) &= \vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} = -5\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

D'où une construction du point G :



2^{ème} méthode :

Si on sait que lorsque G est le barycentre d'un système $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ (avec $\alpha + \beta \neq 0$), alors $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$, on peut

écrire directement que G barycentre de $\{(A,-2);(B,5)\}$ signifie $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{-2+5}\overrightarrow{AB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$ (on retrouve le même résultat !)

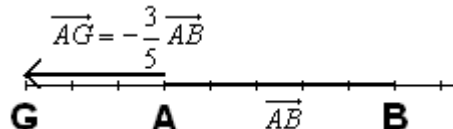
2) Dans le deuxième cas, la somme des coefficients étant nulle, le barycentre du système $\{(A,-3);(B,3)\}$ **n'existe pas**. Inutile d'essayer de le construire !

3) Pour construire le barycentre du système de points pondérés $\left\{\left(A, \frac{2}{3}\right); \left(B, -\frac{1}{4}\right)\right\}$, on commence par multiplier les deux coefficients par 12 car l'égalité $\frac{2}{3}\overrightarrow{GA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ est équivalente à $12\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{GA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{GB}\right) = 12 \times \vec{0} \Leftrightarrow 8\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

(De manière générale on peut multiplier tous les coefficients du système par un même réel non nul).

Ceci supprime les fractions, et rend le calcul vectoriel ou l'application de la formule $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$ plus aisée.

On trouve finalement $\overrightarrow{AG} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, ce qui nous permet de construire le point G :



Exercice n°4

Figure 1 :

1^{ère} méthode : Sur la figure 1) on « lit » que $\overrightarrow{AG} = \frac{6}{9}\overrightarrow{AB}$, égalité vectorielle que l'on transforme successivement en :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} = \frac{6}{9}\overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} - 2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \end{aligned}$$

qui traduit le fait que G est le barycentre du système $\{(A,1);(B,2)\}$

2^{ème} méthode : Si on sait que lorsque G est le barycentre d'un système $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ (avec $\alpha + \beta \neq 0$), alors

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}, \text{ on identifie sans difficulté, à partir de l'égalité } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{1+2}\overrightarrow{AB} \text{ les coefficients } \alpha = 1 \text{ et } \beta = 2.$$

Figure 2 : Sur la figure 2) on « lit » que $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Ou on procède par identification, en remarquant que $\overrightarrow{AG} = \frac{-1}{3+(-1)}\overrightarrow{AB}$, d'où $\alpha = 3$ et $\beta = -1$,

ou on « se lance » dans les égalités vectorielles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \end{aligned}$$

donc G est le barycentre du système $\{(A,-3);(B,1)\}$ ou encore du système $\{(A,(-3)\times(-1));(B,1\times(-1))\}$, c'est-à-dire du système $\{(A,3);(B,-1)\}$ (car on peut multiplier tous les coefficients du système par un même réel non nul).

On retrouve bien le même résultat

Figure 3 : L'observation de la figure 3) conduit à remarquer que on « lit » que $\overrightarrow{AG} = \frac{11}{6}\overrightarrow{AB}$

Par identification, $\overrightarrow{AG} = \frac{11}{-5+11}\overrightarrow{AB}$, donc $\alpha = -5$ et $\beta = 11$.

Par égalités vectorielles,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} = \frac{11}{6}\overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AG} - 11\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{AG} - 11\overrightarrow{AG} - 11\overrightarrow{GB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow -5\overrightarrow{AG} - 11\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA} - 11\overrightarrow{GB} = \vec{0} \end{aligned}$$

donc G est le barycentre du système $\{(A,5);(B,-11)\}$ ou encore du système $\{(A,-5);(B,11)\}$,

Exercice n°5

Pour construire le barycentre d'un système de trois points pondérés, il faut regrouper deux d'entre eux au sein d'un « système partiel », en construire le « barycentre partiel », puis remplacer ce système par son barycentre affecté de la somme des coefficients. Autrement dit,

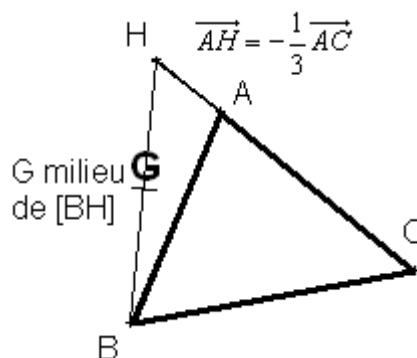
1) Soit $G = \text{Bar}\{(A,4);(B,3);(C,-1)\}$ le point à construire.

Si on note $H = \text{Bar}\{(A,4);(C,-1)\}$, qui est défini par $\overrightarrow{AH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (construction ci-dessous), alors :

$$\begin{aligned} G &= \text{Bar}\{(A,4);(B,3);(C,-1)\} \\ &= \text{Bar}\{(H,4-1);(B,3)\} \\ &= \text{Bar}\{(H,3);(B,3)\} \\ &= \text{Bar}\{(H,1);(B,1)\} \end{aligned}$$

c'est-à-dire G milieu de [HB].

On a ainsi construit le point G grâce au barycentre partiel H



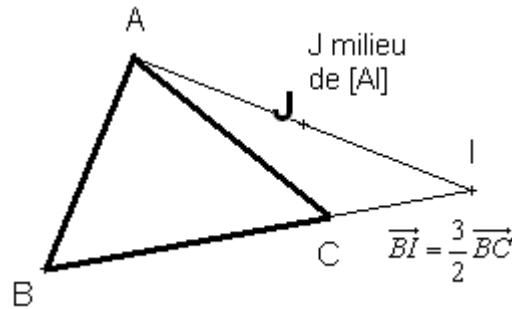
2) Pour construire le barycentre $J = \text{Bar}\left\{\left(A, \frac{1}{6}\right); \left(B, -\frac{1}{12}\right); \left(C, \frac{1}{4}\right)\right\}$, on commence par multiplier tous les coefficients par 12 : $J = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, 3)\}$. On regroupe les deux derniers points en posant $I = \text{Bar}\{(B, -1); (C, 3)\}$, c'est-à-dire $\overline{BI} = \frac{3}{2}\overline{BC}$ (construction ci-contre),

Ensuite, il vient

$$J = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, 3)\}$$

$$= \text{Bar}\{(A, 2); (I, 2)\} = \text{Bar}\{(A, 1); (I, 1)\}$$

donc J est le milieu de [AI]



Exercice n°6

Si H est le barycentre du système $\{(A, 3); (B, 2)\}$, alors $\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AB}$

Si K est le barycentre du système $\{(B, 2); (C, -1)\}$, alors $\overline{BK} = -\overline{BC}$

Si L est le barycentre du système $\{(A, 3); (C, -1)\}$, alors $\overline{AL} = -\frac{1}{2}\overline{AC}$

Si G est le barycentre du système $\{(H, 5); (C, -1)\}$, alors $\overline{HG} = -\frac{1}{4}\overline{HC}$

1) Pour montrer que $3\overline{GA} + 2\overline{GB} - \overline{GC} = \vec{0}$, deux méthodes (au moins !) sont possibles :

1^{ère} méthode : « calculs vectoriels » :

$$3\overline{GA} + 2\overline{GB} - \overline{GC}$$

$$= 3(\overline{GH} + \overline{HA}) + 2(\overline{GH} + \overline{HB}) - (\overline{GH} + \overline{HC})$$

$$= \underbrace{3\overline{GH} + 2\overline{GH} - \overline{GH}}_{4\overline{GH}} + \underbrace{3\overline{HA} + 2\overline{HB}}_0 - \overline{HC}$$

car $H = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2)\}$

$$= 4\overline{GH} - \overline{HC}$$

$$= \vec{0} \text{ car } \overline{HG} = -\frac{1}{4}\overline{HC} \Leftrightarrow \overline{GH} = \frac{1}{4}\overline{HC}$$

2^{ème} méthode : En utilisant la technique dite des « barycentres partiels », on écrit :

$$G = \text{Bar}\left\{\underbrace{(H, 5)}_{\text{car}}; (C, -1)\right\}$$

$$= \text{Bar}\left\{\underbrace{H = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2)\}}_{(A, 3); (B, 2)}; (C, -1)\right\}$$

ce qui permet de conclure directement que $3\overline{GA} + 2\overline{GB} - \overline{GC} = \vec{0}$ (c'est la définition !)

2) Puisque L est le barycentre du système $\{(A, 3); (C, -1)\}$, on écrit

$$G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2); (C, -1)\}$$

$$= \text{Bar}\{(L, 3-1); (B, 2)\}$$

$$= \text{Bar}\{(L, 2); (B, 2)\} = \text{Bar}\{(L, 1); (B, 1)\}$$

donc G est le milieu du segment [BL]

b) Puisque K est le barycentre du système $\{(B, 2); (C, -1)\}$, on écrit :

$$G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2); (C, -1)\} = \text{Bar}\{(A, 3); (K, 2-1)\}, \text{ c'est-à-dire } G = \text{Bar}\{(A, 3); (K, 1)\}$$

Exercice n°7

1) Si K est le barycentre d'un système de points pondérés (C,1),(B,-4), alors on peut écrire :

$$\overline{KC} - 4\overline{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{KB} + \overline{BC} - 4\overline{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overline{KB} + \overline{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overline{BK} + \overline{BC} = \vec{0}, \text{ qui traduit le fait que B est le barycentre du système } \{(K,3);(C,1)\}$$

2) En utilisant le barycentre partiel B du système $\{(K,3);(C,1)\}$, on écrit :

$$\text{Bar}\{(A,2);(K,3);(C,1)\} = \text{Bar}\{(A,2);(B,3+1)\} = \text{Bar}\{(A,2);(B,4)\} = \text{Bar}\{(A,1);(B,2)\}$$

Le barycentre cherché est donc le point J

3) Puisque $J = \text{Bar}\{(A,2);(K,3);(C,1)\}$, en utilisant le fait que I le barycentre des points pondérés (A,2),(C,1), on écrit

$$J = \text{Bar}\{(I,2+1);(K,3)\} = \text{Bar}\{(I,3);(K,3)\} = \text{Bar}\{(I,1);(K,1)\} \text{ donc J est le milieu de [IK].}$$

4) En utilisant la technique des « barycentres partiels », on écrit : Si L est le milieu de [CI], alors

$$\begin{aligned} L = \text{Bar}\{(I,1);(C,1)\} &= \text{Bar}\left\{ \underbrace{(I,3)}_{\text{d'après l'énoncé}} ; (C,3) \right\} \\ &= \text{Bar}\left\{ \underbrace{(A,2);(C,1)}_{I = \text{Bar}\{(A,2);(C,1)\}} ; (C,3) \right\} = \text{Bar}\{(A,2);(C,4)\} = \text{Bar}\{(A,1);(C,2)\} \end{aligned}$$

donc $a = 1$ et $b = 2$. De la même manière,

$$\begin{aligned} L = \text{Bar}\{(K,1);(C,1)\} &= \text{Bar}\left\{ \underbrace{(K,-3)}_{\text{d'après l'énoncé}} ; (C,-3) \right\} \\ &= \text{Bar}\left\{ \underbrace{(C,1);(B,-4)}_{K = \text{Bar}\{(C,1);(B,-4)\}} ; (C,-3) \right\} = \text{Bar}\{(B,-4);(C,-2)\} = \text{Bar}\{(B,2);(C,1)\} \end{aligned}$$

$c = 2$ et $d = 1$

Exercice n°8

Puisque I est le milieu de [AB], alors $I = \text{Bar}\{(A,1);(B,1)\}$

Puisque J est le milieu de [BC], alors $J = \text{Bar}\{(B,1);(C,1)\}$

Puisque K est le milieu de [CD], alors $K = \text{Bar}\{(C,1);(D,1)\}$

Puisque L est le milieu de [DA], alors $L = \text{Bar}\{(A,1);(D,1)\}$

Puisque M est le milieu de [AC], alors $M = \text{Bar}\{(A,1);(C,1)\}$

Puisque N est le milieu de [BD], alors $N = \text{Bar}\{(B,1);(D,1)\}$

Notons $G = \text{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\}$

En effectuant deux regroupements de barycentres partiels, on écrit :

$$\begin{aligned} G &= \text{Bar}\left\{ \underbrace{(A,1);(B,1)}_{I = \text{Bar}\{(A,1);(B,1)\}} ; \underbrace{(C,1);(D,1)}_{K = \text{Bar}\{(C,1);(D,1)\}} \right\} \\ &= \text{Bar}\{(I,2) ; (K,2)\} = \text{Bar}\{(I,1);(K,1)\} \end{aligned}$$

donc G est le milieu de [IK].

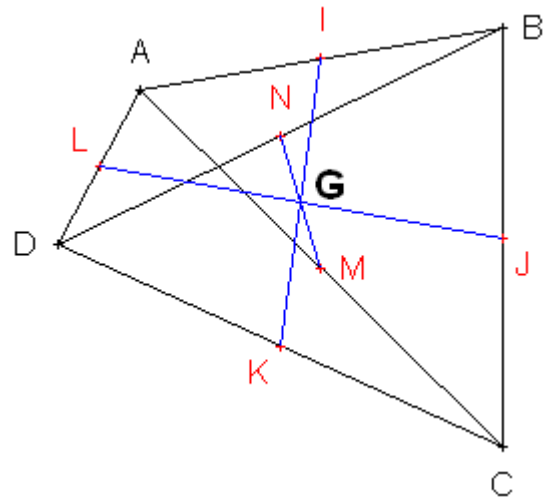
En effectuant un deuxième regroupement, à l'aide de $M = \text{Bar}\{(A,1);(C,1)\}$ et $N = \text{Bar}\{(B,1);(D,1)\}$, on écrit que

$$G = \text{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\} = \text{Bar}\{(M,2);(N,2)\} = \text{Bar}\{(M,1);(N,1)\}, \text{ donc que G est le milieu de [MN].}$$

Enfin, à l'aide du regroupement $J = \text{Bar}\{(B,1);(C,1)\}$ et $L = \text{Bar}\{(A,1);(D,1)\}$, on écrit

$$G = \text{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\} = \text{Bar}\{(J,2);(L,2)\} = \text{Bar}\{(J,1);(L,1)\}, \text{ donc G est le milieu de [JL].}$$

Les trois segments [IK], [MN] et [LJ] sont donc concourants en leur milieu commun G.



Exercice n°9

1) Si on note G le barycentre $G = \text{Bar}\{(A,2);(B,1)\}$ (donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$) et H le barycentre $H = \text{Bar}\{(C,5);(D,-2)\}$ (donc $\overrightarrow{CH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$), alors pour tout point M du plan, on a

$$\begin{aligned} & 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \\ &= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} \\ &= 3\overrightarrow{MG} + \underbrace{2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}}_{\vec{0} \text{ car } G = \text{Bar}\{(A,2);(B,1)\}} = 3\overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

et de même, pour tout point M du plan,

$$\begin{aligned} 5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} &= 5(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC}) - 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HD}) \\ &= 3\overrightarrow{MH} + 5\overrightarrow{HC} - 2\overrightarrow{HD} = 3\overrightarrow{MH} + \vec{0} \end{aligned}$$

L'égalité $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\|$ devient alors équivalente à $\|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{MH}\|$, donc à $3MG = 3MH \Leftrightarrow GM = HM$

Le point M est donc équidistant des points G et H, donc appartient à la médiatrice du segment [GH].

Γ_1 est donc la médiatrice de [GH] (en bleu sur le dessin)

Notons I le milieu de [GH].

Alors $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{IC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{IC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ car $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ puisque ABCD est un rectangle. D'autre part $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{IC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$. On en déduit donc que $\overrightarrow{IH} = -\overrightarrow{IG}$, donc que I est le milieu de [GH], donc que I appartient bien à la médiatrice Γ_1 de [GH]

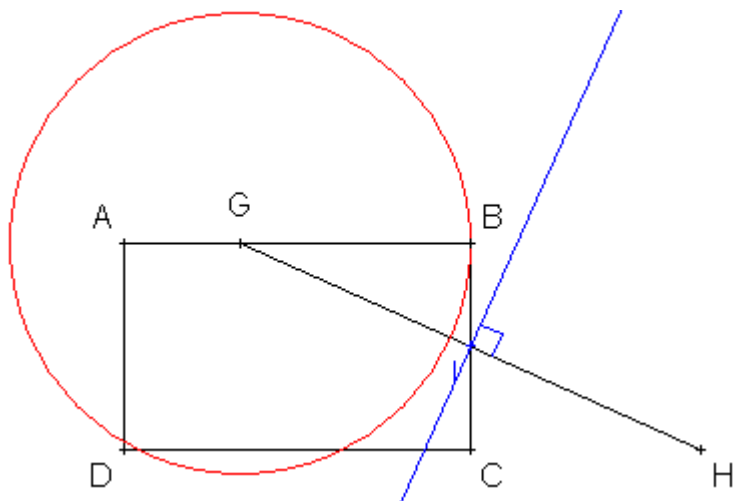
2) On utilise de nouveau le point $G = \text{Bar}\{(A,2);(B,1)\}$ pour écrire l'équivalence :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 2AB \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = 12 \Leftrightarrow 3GM = 12 \Leftrightarrow GM = 4$$

M appartient donc au cercle de centre G et de rayon 4.

Γ_2 est donc le cercle de centre G et de rayon 4 (en rouge sur le dessin)

Puisque $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, on en déduit que $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\|\overrightarrow{GB}\| = \left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right\| \Leftrightarrow BG = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3} \times 6 = 4$, donc M appartient donc au cercle Γ_2 de centre G et de rayon 4.



Exercice n°10 - Deux méthodes équivalentes sont envisageables :

1^{ère} méthode :

L'application des formules du cours : $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ et $y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$,

Qui se traduisent ici par $x_G = \frac{2 \times (-1) - 3 + 3 \times 2}{2 - 1 + 3} = \frac{1}{4}$ et $y_G = \frac{2 \times 2 - 1 + 3 \times 4}{2 - 1 + 3} = \frac{15}{4}$

2^{ème} méthode : Le retour à la définition générale :

Le point G barycentre du système (A;2), (B;-1) et (C;3) vérifie donc $2\overline{GA} - \overline{GB} + 3\overline{GC} = \vec{0}$.

Si on note $G(x_G; y_G)$, on exprime en fonction de x_G et y_G les coordonnées des vecteurs :

$$\overline{GA} \begin{cases} x_A - x_G = -1 - x_G \\ y_A - y_G = 2 - y_G \end{cases} \text{ donc } 2\overline{GA} \begin{cases} 2(-1 - x_G) = -2 - 2x_G \\ 2(2 - y_G) = 4 - 2y_G \end{cases}; \quad \overline{GB} \begin{cases} x_B - x_G = 3 - x_G \\ y_B - y_G = 1 - y_G \end{cases} \text{ donc } -\overline{GB} \begin{cases} -(3 - x_G) = x_G - 3 \\ -(1 - y_G) = y_G - 1 \end{cases}$$

$$\overline{GC} \begin{cases} x_C - x_G = 2 - x_G \\ y_C - y_G = 4 - y_G \end{cases} \text{ donc } 3\overline{GC} \begin{cases} 3(2 - x_G) = 6 - 3x_G \\ 3(4 - y_G) = 12 - 3y_G \end{cases}$$

On arrive ainsi aux coordonnées de $2\overline{GA} - \overline{GB} + 3\overline{GC}$:

$$2\overline{GA} - \overline{GB} + 3\overline{GC} \begin{cases} -2 - 2x_G + x_G - 3 + 6 - 3x_G = -4x_G + 1 \\ 4 - 2y_G + y_G - 1 + 12 - 3y_G = -4y_G + 15 \end{cases}$$

Puisque $2\overline{GA} - \overline{GB} + 3\overline{GC} = \vec{0}$, et que le vecteur nul possède deux coordonnées... nulles !, on obtient les deux équations

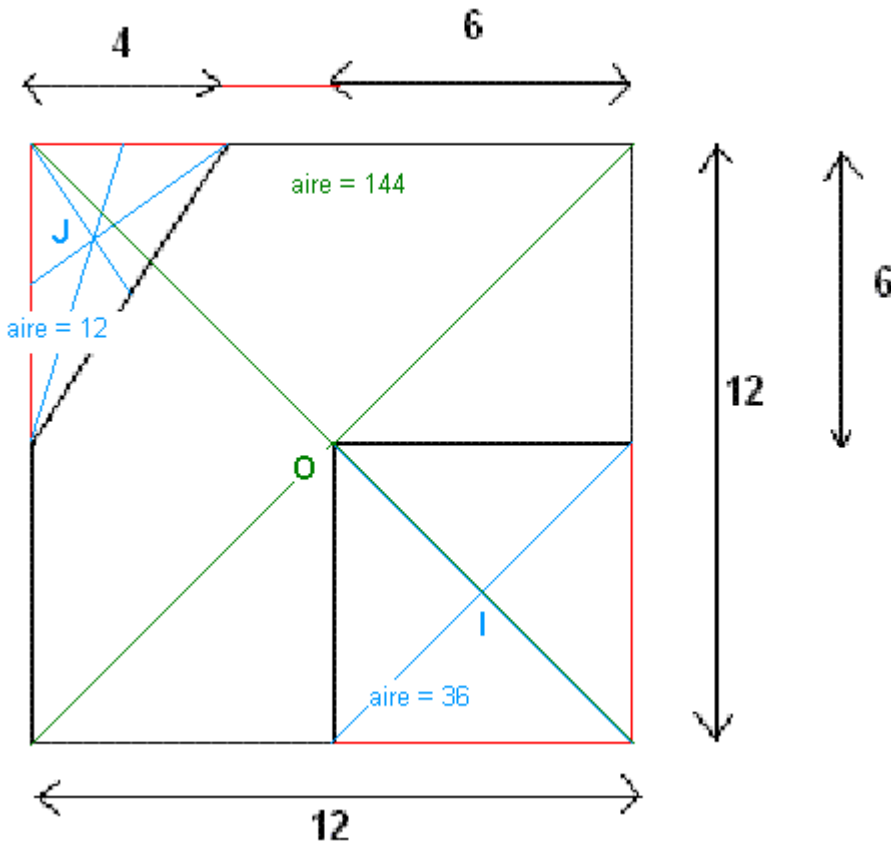
$$-4x_G + 1 = 0 \text{ et } -4y_G + 15 = 0 \text{ grâce auxquelles on retrouve bien } x_G = \frac{1}{4} \text{ et } y_G = \frac{15}{4}$$

Exercice n°11

Deux « zones » ont évidé le « grand carré » d'aire 144 unités d'aire, de centre de gravité O (intersection des diagonales en vert) :

- Un triangle d'aire $\frac{4 \times 6}{2} = 12$ unités d'aires, de centre de gravité J (intersection des médianes en bleu)

- Un « petit carré » d'aire 36 unités d'aires, de centre de gravité I (intersection des diagonales en bleu)

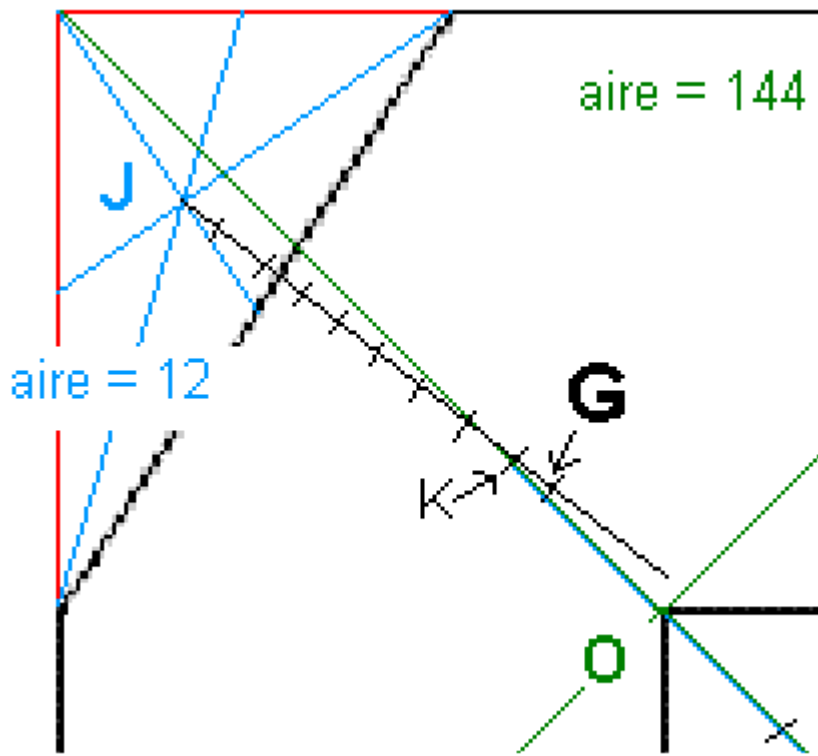


Le centre de gravité « global » sera le point G barycentre :

$$G = \text{Bar}\{(O, 144); (J, -12); (I, -36)\} = \text{Bar}\{(O, 12); (J, -1); (I, -3)\}$$

En introduisant le barycentre partiel $K = \text{Bar}\{(O, 12); (I, -3)\} = \text{Bar}\{(O, 4); (I, -1)\} \Leftrightarrow \overline{OK} = -\frac{1}{3}\overline{OI}$ (construction : figure

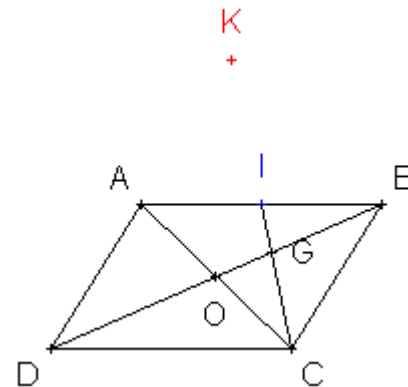
ci-dessous), on se retrouve avec $G = \text{Bar}\{(J, -1); (K, 9)\} \Leftrightarrow \overline{JG} = \frac{9}{8}\overline{JK}$



Exercices de synthèse :

Exercice n°12

1) Si on note O l'intersection des diagonales du parallélogramme, O est le milieu de [AC]. Le segment [BD] (ou [BO]) est donc, dans le triangle ABC, la médiane issue de B. De même, le segment [BI] est la médiane issue de C, puisque I est le milieu de [AB]. Le point G intersection de (DB) et (CI) est donc le centre de gravité (ou encore isobarycentre) du triangle ABC. Il vérifie donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$



2) a) En regroupant les points A et B par l'intermédiaire de leur milieu I, on écrit :

$K = Bar\{(A,1);(B,1);(C,-1)\} = Bar\{(I,2);(C,-1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{IC}$, on en déduit que I est le milieu de [KC], d'où la construction du point K (en rouge) :

b) En utilisant la décomposition $G = Bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$, puis en regroupant les coefficients du point C, on obtient :

$$Bar\{(G,3);(C,-2)\} = Bar\{(A,1);(B,1);(C,1);(C,-2)\} = Bar\{(A,1);(B,1);(C,1-2)\} = Bar\{(A,1);(B,1);(C,-1)\} = K$$

3) On écrit

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$
car ABCD est un parallélogramme

On en déduit $-3\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$, ou encore, en multipliant par -1 : $3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ donc A est le barycentre des points pondérés (D ; 1), (G ; 3) et (C ; -2)

b) Puisque $A = Bar\{(D,1);(G,3);(C,-2)\}$, et puisque $K = Bar\{(G,3);(C,-2)\}$ (question 2b), on en déduit que $A = Bar\{(D,1);(K,3-2)\} = Bar\{(D,1);(K,1)\}$ donc A est le milieu du segment [DK]

4) En utilisant les barycentres $A = Bar\{(D,1);(G,3);(C,-2)\}$ et $I = Bar\{(A,1);(B,1)\}$ milieu de [AB], on écrit l'équivalence $\|\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MA}\| = \|2\overrightarrow{MI}\| \Leftrightarrow AM = IM$.

M appartient donc à la médiatrice du segment [AI]

5) a) Le barycentre du système (D, m), (G ; 3) et (C ; -2) existe si et seulement si la somme des coefficients du système est non nulle, c'est-à-dire si et seulement si $1 + m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. Le barycentre du système (D, m), (G ; 3) et (C ; -2) existe donc pour tout $m \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

b) Pour tout $m \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$, si on note $I_m = Bar\{(D,m);(G,3);(C,-2)\}$, on a donc

$$\begin{aligned} m\overrightarrow{I_m D} + 3\overrightarrow{I_m G} - 2\overrightarrow{I_m C} = \vec{0} &\Leftrightarrow m\overrightarrow{I_m D} + 3(\overrightarrow{I_m D} + \overrightarrow{DG}) - 2(\overrightarrow{I_m D} + \overrightarrow{DC}) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow (m+1)\overrightarrow{I_m D} + 3\overrightarrow{DG} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0} &\Leftrightarrow (m+1)\overrightarrow{I_m D} + 3(\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KG}) - 2(\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KC}) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow (m+1)\overrightarrow{I_m D} + \overrightarrow{DK} + \underbrace{3\overrightarrow{KG} - 2\overrightarrow{KC}}_0 = \vec{0} \end{aligned}$$

Ainsi $(m+1)\overrightarrow{I_m D} = -\overrightarrow{DK} \Leftrightarrow \overrightarrow{DI_m} = \frac{1}{m+1}\overrightarrow{DK}$

c) Si on note $f(x) = \frac{1}{1+x}$, défini sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on calcule $f(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} < 0$ donc f est strictement décroissante sur

$]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$.

D'où le tableau de variations :

| | | | |
|------------------------|---|------|---|
| x | $-\infty$ | -1 | $+\infty$ |
| $f(x) = \frac{1}{1+x}$ | $\begin{array}{c} \square \\ \searrow \\ -\infty \end{array}$ | | $\begin{array}{c} +\infty \\ \searrow \\ \square \end{array}$ |

d) D'après le tableau de variations, l'image de l'ensemble $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ est l'ensemble $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. Ainsi le coefficient de colinéarité $\frac{1}{m+1}$ existant entre $\overrightarrow{DI_m}$ et \overrightarrow{DK} parcourant tout l'ensemble $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, le point I_m parcourt toute la droite (DK), sauf le point D

Exercice n°13

Dans le plan (P), on considère un triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH], telle que AH=BC=4, l'unité choisie étant le centimètre.

1) On introduit le milieu H de [BC] (puisque dans un triangle isocèle en A, la hauteur issue de A est aussi médiane issue de A), pour conclure que $G = \text{Bar}\{(A,2);(B,1);(C,1)\} = \text{Bar}\{(A,2);(H,2)\} = \text{Bar}\{(A,1);(H,1)\}$ est le milieu de [AH].

2) Pour tout point M,

$$\vec{V} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = 2\vec{MA} - (\vec{MA} + \vec{AB}) - (\vec{MA} + \vec{AC}) = 2\vec{MA} - \vec{MA} - \vec{MA} - \vec{AB} - \vec{AC} = -(\vec{AB} + \vec{AC}) = -2\vec{AH}$$

donc $\|\vec{V}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|-2\vec{AH}\| = 2AH = 8$

3) En utilisant le barycentre $G = \text{Bar}\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$, on écrit l'équivalence :

$$\|2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{V}\| \Leftrightarrow \|4\vec{MG}\| = 8 \Leftrightarrow GM = 2. \text{ M parcourt donc le cercle de centre G et de rayon 2}$$

4) a) Le barycentre G_n du système de points pondérés $\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$ existe quel que soit l'entier naturel n car la somme des coefficients vaut $2+n$ qui ne s'annule pas si n est un entier naturel

b) En introduisant le milieu H de [BC], on écrit $G_n = \text{Bar}\{(A,2);(B,n);(C,n)\} = \text{Bar}\{(A,2);(H,2n)\}$ donc

$$\vec{AG}_n = \frac{2n}{2+2n} \vec{AH} = \frac{n}{1+n} \vec{AH}. \text{ Comme pour tout } n \in \mathbb{N}, \frac{n}{1+n} < 1, \text{ le coefficient de colinéarité entre } \vec{AG}_n \text{ et } \vec{AH} \text{ étant}$$

un réel compris entre 0 et 1, on peut affirmer que G_n appartient au segment [AH].

c) En introduisant le barycentre $G_n = \text{Bar}\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$, on écrit l'équivalence :

$$\|2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC}\| = n\|\vec{V}\| \Leftrightarrow \|(2+2n)\vec{MG}_n\| = 8n \Leftrightarrow G_nM = \frac{8n}{2+2n} = \frac{4n}{1+n}.$$

Le point M parcourt donc le cercle Γ_n de centre G_n et de rayon $\frac{4n}{1+n}$.

Le point A appartient à Γ_n car l'égalité $\|2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC}\| = n\|\vec{V}\|$ est vérifiée si on remplace M par A.

En effet d'une part $\|2\vec{AA} + n\vec{AB} + n\vec{AC}\| = \|n(\vec{AB} + \vec{AC})\| = n\|\vec{AB} + \vec{AC}\| = n\|2\vec{AH}\| = 8n$, et d'autre part $n\|\vec{V}\| = 8n$.

D'où l'égalité, qui prouve que le point A appartient à Γ_n .

d) L'égalité $\vec{AG}_n = \frac{n}{1+n} \vec{AH}$ implique que $AG_n = \frac{4n}{1+n}$

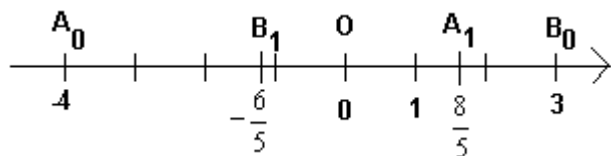
5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} AG_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{1+n} = 4$ et G_n appartenant au segment [AH] nous permettent de conclure que lorsque n tend vers $+\infty$, le point G_n se rapproche indéfiniment (tend vers) du point H.

Exercice n°14

1) A_1 le barycentre de $(A_0,1)$ et $(B_0,4)$, donc $a_1 = \frac{1a_0 + 4b_0}{5} = \frac{8}{5}$

B_1 le barycentre de $(A_0,3)$ et $(B_0,2)$, donc $b_1 = \frac{3a_0 + 2b_0}{5} = -\frac{6}{5}$

On obtient donc :



2) A_{n+1} est le barycentre de $(A_n,1)$ et $(B_n,4)$ donc $a_{n+1} = \frac{a_n + 4b_n}{5} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$

B_{n+1} est le barycentre de $(A_n,3)$ et $(B_n,2)$ donc $b_{n+1} = \frac{3a_n + 2b_n}{5} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$

3) a) Initialisation : On vérifie que : $3a_0 + 4b_0 = 3 \times (-4) + 4 \times 3 = 0$

Hérédité : On considère que pour un entier naturel n, $3a_n + 4b_n = 0$

On calcule alors :

$$3a_{n+1} + 4b_{n+1} = 3 \times \frac{1}{5}(a_n + 4b_n) + 4 \times \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) = \frac{3a_n + 12b_n + 12a_n + 8b_n}{5} = \frac{15a_n + 20b_n}{5} = 3a_n + 4b_n$$

Or $3a_n + 4b_n = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Conclusion :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $3a_n + 4b_n = 0$

b) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3a_n + 4b_n = 0$, alors $b_n = -\frac{3}{4}a_n$ et $a_n = -\frac{4}{3}b_n$.

Ainsi, l'égalité $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$ devient $a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(a_n + 4 \times \left(-\frac{3}{4}a_n\right)\right) = \frac{1}{5}(a_n - 3a_n) = -\frac{2}{5}a_n$

L'égalité $b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$ devient $b_{n+1} = \frac{1}{5}\left(3 \times \left(-\frac{4}{3}b_n\right) + 2b_n\right) = \frac{1}{5}(-4b_n + 2b_n) = -\frac{2}{5}b_n$

4) a) La suite a est donc géométrique de raison $-\frac{2}{5}$ et de premier terme $a_0 = -4$. Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = a_0 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n = -4 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n.$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 3 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n$.

b) La raison des suites géométriques a et b appartient à l'intervalle $] -1 ; 1[$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$

c) Lorsque n tend vers $+\infty$, les points A_n et B_n se rapprochent aussi près que l'on veut de l'origine O de la droite graduée.