1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

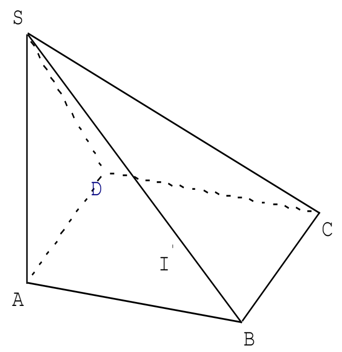
Enoncés

Exercices corrigés de géométrie espace

1.

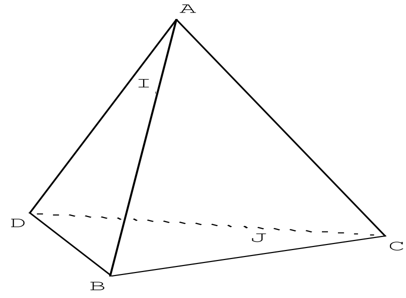
On considère la pyramide ABCDS, où ABCD est un parallélogramme de centre I. Compléter le plus précisément possible.

1. L'intersection des plans (SAB) et (SBC) est ...
2. L'intersection des plans (SAD) et (SBC) est ...
3. L'intersection des plans (SAB) et (SCD) est ...
4. L'intersection des plans (SAC) et (SBD) est ...
5. L'intersection des plans (SBD) et (ABC) est ...
6. Les droites (SB) et (AC) sont ...
7. Les droites (SC) et (AD) sont ...
8. Les droites (SD) et (BI) sont ...



2.

ABCD est un tétraèdre. I est un point de [AB] et J est un point de [DC]. Déterminer l'intersection des plans (ABJ) et (CDI).



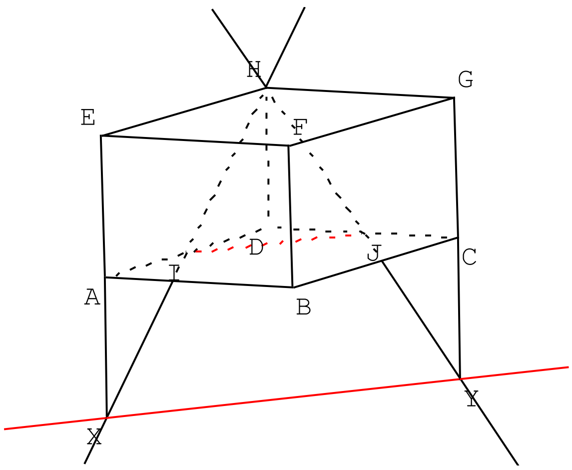
3.

On considère le pavé droit ABCDEFGH. I et J sont les milieux respectifs des segments [AD] et [CD].

a. Montrer que les droites (HI) et (EA) sont sécantes. On note X le point d'intersection.

b. Montrer que les droites (HJ) et (CG) sont sécantes. On note Y le point d'intersection.

c. Montrer que les droites (XY) et (IJ) sont parallèles.



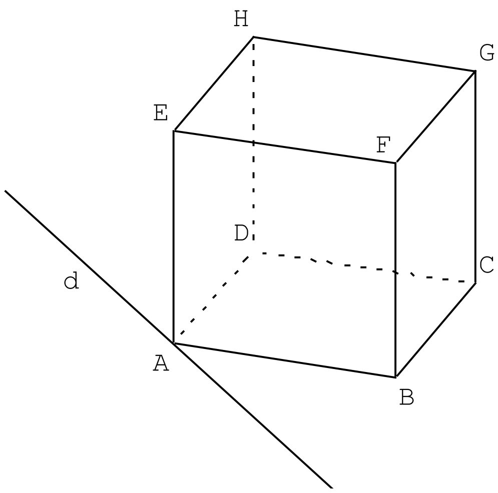
4.

ABCDEFGH est un cube. On note (d) la parallèle à (BD) passant par A.

a. Montrer que (d) et (FH) sont coplanaires.

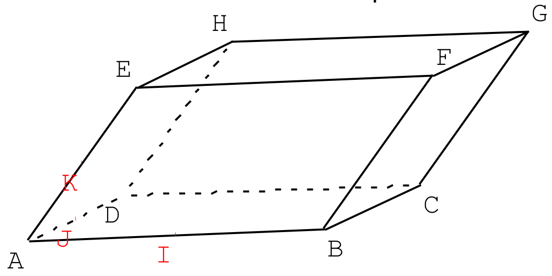
b. Montrer que (BC) et (d) sont sécantes.

c. Montrer que (BC) et (AFH) ne sont pas orthogonaux.



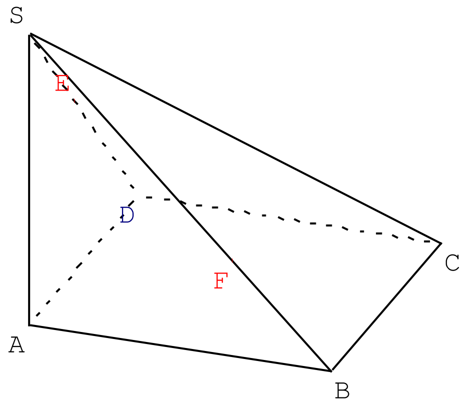
5.

ABCDEFH est un parallélépipède.
a. Montrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.
b. On note I, J, et K les milieux respectifs des segments [AB], [AD], et [AE]. Montrer que les plans (IJK) et (BDE) sont parallèles.
c. Que peut-on conclure pour les plans (IJK) et (CFH) ?



6.

On considère la pyramide ABCDS. E est un point sur le segment [SD] et F un point sur le segment [SB] de telle façon que (EF) ne soit pas parallèle au plan (ABC).
De plus, les plans (SAD) et (ABC) sont perpendiculaires, ABCD est un rectangle, et SAD un triangle rectangle isocèle en D. On donne aussi AD = 3 ; AB = 4.
Dessiner en vraie grandeur le triangle SDB, puis placer les points E et F, et construire M, point d'intersection des droites (EF) et (BD).



7.

On considère trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. On définit : $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k}$, et $\vec{w} = 3\vec{i} - \vec{j}$.
a. Montrer que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires.
b. Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

8.

On donne A(1;2;3), B(3;-4;1) et C(0;-2;-2). Donner une représentation paramétrique de la droite (AB), puis indiquer si le point C appartient ou non à cette droite.

9.

Une représentation paramétrique de la droite (d) est $\begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite parallèle à (d) passant par A(1;0;-1).

10.

Une représentation paramétrique du plan (P) est $\begin{cases} x = 1 - t + s \\ y = 2 - 3t \\ z = 4t - 5s \end{cases}$.

Que peut-on dire de la droite (d) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -5t \end{cases}$?

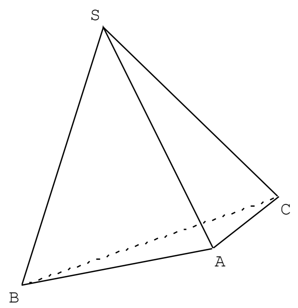
A partir de l'exercice 11, on se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ <u>orthonormal</u> (cette précision suggère que l'on va pouvoir parler de distances et calculer des produits scalaires avec les coordonnées)

11.

Dans un cube ABCDEFGH d'arête a, calculer de trois façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DG}$ (avec la définition en choisissant une base orthonormée, avec le cosinus, avec la projection orthogonale).

12.

Soit SABC un tétraèdre régulier (cela signifie que chaque face est un triangle équilatéral).
Montrer à l'aide du produit scalaire que deux arêtes opposées sont orthogonales (on pourra démontrer par exemple que les arêtes (SA) et (BC) sont orthogonales).



13.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points A, B, et C de coordonnées :
A (-1 ; 1 ; 3) , B (2 ; 1 ; 0) , C (4 ; -1 ; 5).
a. Montrer que les points A, B, et C ne sont pas alignés.
b. Trouver une équation du plan (ABC).

14.

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 4+3t \\ y = -2+t \,, t \in \mathbb{R} \\ z = 1-5t \end{cases}$,

et les points de coordonnées A(1;9;1) et B(0;2;-1). Montrer que (d) est orthogonale à (AB).

15.

Etudier l'intersection des deux plans : (P) : $x-4y+7=0$ et (Q) : $x+2y-z+1=0$.

16.

Soit (P_1) le plan passant par A(2;0;0) et de vecteur normal $\vec{n}(-1;3;-8)$.
Soit (P_2) le plan passant par B(0;-1;0), C(3;0;0), D(4;3;1).
Etudier l'intersection des deux plans (P_1) et (P_2).

17.

Etudier l'intersection du plan (P) d'équation $z=2x$ avec la droite (D) définie par le système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = t-1 \\ y = -3t \\ z = 2 \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

18.

Soit (P) le plan passant par A(-3 ;1 ;2) et de vecteur normal $\vec{n}(1;2;1)$.
Soit (D) la droite passant par B(2 ;1 ;5) et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-1;1)$.
Etudier l'intersection du plan (P) et de la droite (D).

19.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point S de coordonnées S(3 ;4 ;0,1) et les deux droites (D_1) et (D_2) dont on connaît des représentations paramétriques :

$(D_1) : \begin{cases} x = 3+a \\ y = 9+3a \\ z = 2 \end{cases}$, avec $a \in \mathbb{R}$; $(D_2) : \begin{cases} x = 0,5+2b \\ y = 4+b \\ z = 4-b \end{cases}$, avec $b \in \mathbb{R}$.

On note aussi (P_1) le plan contenant S et (D_1) et (P_2) le plan contenant S et (D_2).

a. Indiquer les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de (D_1) et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de (D_2).

b. Prouver que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.

c. Montrer que (D_2) est sécante à (P_1). Préciser les coordonnées de H, point d'intersection de (D_2) et (P_1).

20.

On donne : $A(1,-1,0)$, $B(0,-1,1)$, $C(3,-2,0)$, et $D(2,-3,3)$.

Etudier l'intersection des droites (AB) et (CD).

21.

Etudier l'intersections des plans (P), (Q), et (R) définis par leurs équations cartésiennes respectives :

a) (P) : $2x-y-z+3=0$ (Q) : $x+2y-z-1=0$ (R) : $y+z+2=0$

b) (P) : $x+y+1=0$ (Q) : $x-z-4=0$ (R) : $y+z=0$

22.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et (P) un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$.

On note $H(x_H, y_H, z_H)$ le projeté orthogonal de A sur le plan (P).

1. Montrer que $\left|\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}\right| = \left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|$.

2. En déduire que $AH = \dfrac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

On dit que AH est la distance du point A au plan (P).

3. Applications (les trois questions sont indépendantes):

a) Déterminer la distance entre les plans d'équations $x+y=0$ et $x+y=5$.

b) On donne : A(1 ;-2 ;1), B(1 ;2 ;3), $\vec{n}(-1;1;2)$.

Déterminer la distance du point A au plan passant par B et de vecteur normal $\vec{n}$.

c) Soit (P) le plan d'équation $x+y+z-2=0$ et (S) la sphère de centre A(1 ;0 ;-2) et de rayon $\sqrt{3}$. Démontrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S).

23.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(1 ;2 ;2) , B(3 ;2 ;1) , et C(1 ;3 ;3).

1) Montrer que les points A, B, et C déterminent un plan. Donner une équation de ce plan.

2) On considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives $x-2y+2z-1=0$ et $x-3y+2z+2=0$.

a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

b. On note (d) leur droite d'intersection. Justifier que C appartient à (d).

c. Démontrer que le vecteur $\vec{u}(2;0;-1)$ est un vecteur directeur de la droite (d).

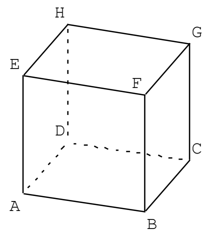
3) a. En utilisant les coordonnées de C et de $\vec{u}$, donner une représentation paramétrique de la droite (d).

b. Soit M un point de (d). Déterminer la valeur du paramètre pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.

c. En déduire la distance du point A à la droite (d).

24.

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. R est le milieu de [BF], S est tel que $3\overrightarrow{ES} = 2\overrightarrow{EH}$, et T est le pied de la hauteur issue de S dans le triangle ARS.



1. a. Déterminer les coordonnées de R, et en déduire un système d'équations paramétriques de la droite (AR).
b. Déterminer les coordonnées de S, et en déduire une équation cartésienne du plan (P) passant par S et perpendiculaire à la droite (AR).
c. Trouver les coordonnées du point T.
d. Calculer l'aire $\mathcal{A}_{ARS}$ du triangle ARS.
2. a. Calculer le volume V_{ARSE} du tétraèdre ARSE.
b. Calculer la distance du point E au plan (ARS).