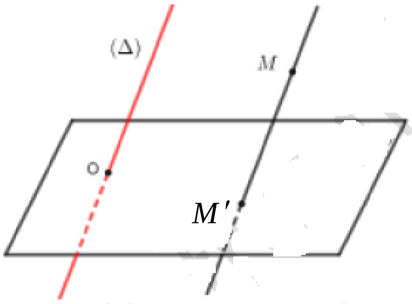
Géométrie analytique de l'espace

I)LE REPERE DANS L'ESPACE et LA BASE DANS V_3

1) La projection sur un plan parallèlement à une droite.

1.1 Définition : Considérons un plan (P) dans l'espace $(\mathcal{E})$ et (Δ) une droite qui coupe



(P) en O. Soit M un point dans l'espace $(\mathcal{E})$; on sait que par M passe une Seule droite parallèle à (Δ), donc elle coupe le plan (P) en un seul point M'. Le point M' s'appelle la projection du point $\boldsymbol{M}$ sur le plan $(\boldsymbol{P})$ Parallèlement à la droite $(\boldsymbol{\Delta})$.

Ainsi ; on définit l'application :

p: $(\mathcal{E}) \to (P)$

$M \mapsto M' = p(M)$

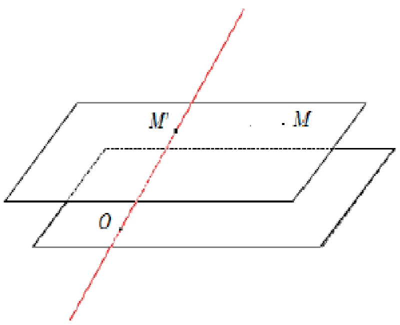
L'application p s'appelle la projection sur le plan $(\boldsymbol{P})$ parallèlement à $(\boldsymbol{\Delta})$

1.2 Propriété de la projection $\boldsymbol{p}$.

- Si on remplace la droite (Δ) par une droite qui lui est parallèle, la projection p ne varie pas, ce qui nous permet de dire que p est la projection sur le plan $(\boldsymbol{P})$ dans la direction de $(\boldsymbol{\Delta})$.
- L'application p est surjective, mais pas injective.
- L'image de la droite (Δ) par l'application p est le singleton $\{O\}$.
- L'ensemble des points invariants par la projection p est le plan (P).

2) La projection sur une droite parallèlement à un plan.

2.1 Définition : Considérons un plan (P) dans l'espace $(\mathcal{E})$ et (Δ) une droite qui coupe (P)en O. Soit M un point dans l'espace $(\mathcal{E})$; on sait que par M passe un seul plan parallèle à



(P), donc il coupe la droite (Δ) en un seul point M'.

Le point M' s'appelle la projection du point $\boldsymbol{M}$ sur la droite $(\boldsymbol{\Delta})$ Parallèlement au plan $(\boldsymbol{P})$.

Ainsi ; on définit l'application :

q: $(\mathcal{E}) \to (\Delta)$

$M \mapsto M' = q(M)$

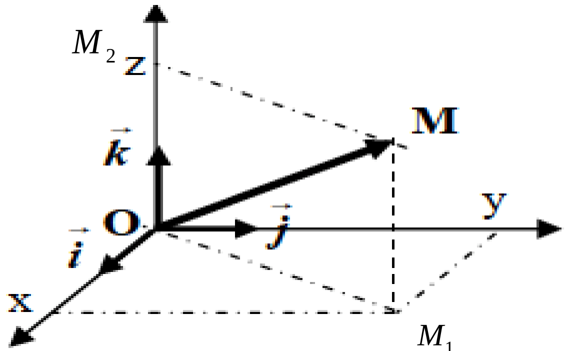
L'application q s'appelle la projection sur la droite $(\boldsymbol{\Delta})$ Parallèlement au plan $(\boldsymbol{P})$.

2.2 Propriété de la projection $\boldsymbol{q}$.

- Si on remplace le plan (P) par un plan qui lui est parallèle, la projection q ne varie pas, ce qui nous permet de dire que q est la projection sur la droite $(\boldsymbol{\Delta})$ dans la direction de $(\boldsymbol{P})$.
- L'application q est surjective, mais pas injective.
- L'ensemble des points invariants par la projection q est la droite (Δ).

3) Le repère dans l'espace $(\mathcal{E})$

Soit O un point dans l'espace $(\mathcal{E})$ et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs



non coplanaires

On pose : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$

Soient M un point dans l'espace, la droite qui passe par M et parallèle a (OK) coupe le plan (OIJ) en M_1

On a : $M_1 \in (OIJ)$ donc $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont non coplanaires

Donc : il existe un et un seul couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ tel que : $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$ donc : $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i} + y\vec{i}$

la droite qui passe par M et parallèle au plan (OIJ) coupe la droite (OK) en M_2

On a : $M_2 \in (OK)$ donc $\overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires
Donc il existe un et un seul réelle z tel que :
$\overrightarrow{OM_2} = z\overrightarrow{OK} = z\vec{k}$
Et puisque OM_1MM_2 est un parallélogramme
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ et par suite :
$(\forall M \in (\mathcal{E}))(\exists! (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$

Propriété et définition: Soit O un point dans l'espace $(\mathcal{E})$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires :
$(\forall M \in (\mathcal{E}))(\exists! (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$
Le quadruplet $R(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ s'appelle **u**n repère dans l'espace $(\mathcal{E})$ **;** on écrit $M(x, y, y)$
- Le réel x s'appelle l'abscisse du point M dans le repère R
- Le réel y s'appelle l'ordonnée du point M dans le repère R
- Le réel z s'appelle la cote du point M dans le repère R

Remarque : Pour définir un repère de l'espace il suffit d'un point et de 3 vecteurs non coplanaires

4) La base dans l'espace vectoriel V_3 .

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires et $\vec{u}$ un vecteur donné
Si O est un point dans l'espace $(\mathcal{E})$ alors on sait qu'il existe un seul point M dans $(\mathcal{E})$ tel que :
$\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et d'après la propriété précédente :
$\exists! (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$
On peut conclure donc qu'il existe un unique triplet (x, y, z) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$

Propriété et définition: Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires dans V_3
On a : $(\forall \vec{u} \in V3)(\exists! (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3$ /
$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$
Le triplet $B(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ s'appelle une base de l'espace vectoriel V_3 on écrit $\vec{u}(x;y;z)$
- Le réel x s'appelle la première composante du vecteur $\vec{u}$ dans la base β
- Le réel y s'appelle la deuxième composante du vecteur $\vec{u}$ dans la base β
- Le réel z s'appelle la troisième composante du vecteur $\vec{u}$ dans la base β

Remarque : Pour définir une base de l'espace vectoriel V_3 , il suffit de trois vecteurs non coplanaires.

5) Les opérations dans V_3 .

- $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs dans l'espace vectoriel V_3 muni de la base $B(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on a donc : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{i} + z'\vec{k}$ par suite :
$\vec{u} + \vec{v} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j} + (z + z')\vec{k}$
D'où : $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y'; z + z')$
De même on montre que si k est un réel alors : $k\vec{u}(kx;ky;kz)$
Si I est le milieu du segment $[AB]$
alors : $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$
- Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$,
Si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ alors
$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; x_B - x_A; z_B - z_A)$
$\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ sont égaux si et seulement si :x = x' , y = y' et z = z'.

II) CONDITIONS ANALYTIQUE DE COLINEARITE DE DEUX VECTEURS.

Soient $B(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de V_3 et $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ Deux vecteurs non nuls.
On sait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$ et ceci est équivalent à :
$x' = kx$ et $y' = ky$ et $z' = kz$
et puisque $\vec{u} \neq \vec{0}$ on peut supposer l'un des réels non nul x par exemple
et on aura: $k = \dfrac{x'}{x}$ (1) et $y' = \dfrac{x'}{x}y$ (2)
et $z' = \dfrac{x'}{x}z$ (3)

ce qui est équivalent à :

$k=\frac{x'}{x}$ et $xy'-yx'=0$ et $xz'-zx'=0$

et de (2) et (3) on peut conclure :

$y'z=\frac{x'}{x}yz$ et $z'y=\frac{x'}{x}zy$

d'où : $yz'-zy'=0$ et finalement :

$yz'-zy'=0$ et $xy'-yx'=0$ et $xz'-zx'=0$ ce qui se traduit par : $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$ et $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$

et $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=0$ etLes trois déterminants s'appelle

les déterminants extraits de $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$

Remarque : les déterminants extraits on les trouve par la suppression des lignes

Donc : Si deux vecteurs sont colinéaires alors tous les déterminants extraits sont nuls.

Remarquer que : cette propriété reste vraie si l'un des vecteurs est nul.

Inversement : Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs non nuls.

Tels que : $yz'-zy'=0$ et $xy'-yx'=0$ et $xz'-zx'=0$

montrons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

et puisque $\vec{u}\neq\vec{0}$ on peut supposer l'un des réels non nul, y par exemple on aura :

$y'=\frac{y'}{y}y$ et $x'=\frac{y'}{y}x$ et $z'=\frac{y'}{y}z$ donc, on posant :

$k=\frac{y'}{y}$ on obtient : $y'=ky$ et $x'=kx$ et $z'=kz$

ce qui est équivalent à : $\vec{v}=k\vec{u}$

par suite $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Théorème : Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs non nuls.

les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement tous les déterminants extraits de

$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$ sont nuls c'est-à-dire :

$yz'-zy'=0$ et $xy'-yx'=0$ et $xz'-zx'=0$

Remarques : $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont des triplets proportionnels.

Exemple: $\vec{u}(1;-1;2)$ et $\vec{v}(-2;2;-4)$ et $\vec{w}(1;1;2)$

1)étudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

2)étudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$

Solution :1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2-2=0$ et $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-4+4=0$

et $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=4-4=0$ Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

2) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2-2=-4\neq 0$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont non colinéaires

Exercice : Soit l'espace $(\mathcal{E})$ muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$; et considérons les points

$A(1;2;1)$ et $B(2;1;3)$ et $C(-1;4;-3)$ et $D(2;3;3)$

1. étudier l'alignement des points A, B et C
2. étudier l'alignement des points A, B et D

Solution :1) $\overrightarrow{AB}(2-1;1-2;3-1)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$

$\overrightarrow{AC}(-1-1;4-2;-3-1)\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}(-2;2;-4)$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=4-4=0$ et $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-4+4=0$ et $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2-2=0$

Donc A, B et C sont alignés

2) $\overrightarrow{AB}(2-1;1-2;3-1)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$

$\overrightarrow{AD}(2-1;3-2;3-1)\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}(1;1;2)$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2-2=-4\neq 0$ Donc A, B et D ne sont pas alignés

Exercice : Soit l'espace $(\mathcal{E})$ muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$; et considérons les points

A (1, −2,1) ; B (−1,0,1) ; C (0,1,0) et E (7,6,1)

1. Vérifier que les points A, B et C sont non alignés
 Que pouvez-vous dire des points A, B et E.
2. Déterminer le point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Déterminer le centre de ce parallélogramme.

III) CONDITIONS ANALYTIQUE DE COPLANARITE DE TROIS VECTEURS.

Définition : Soient $B\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base de V_3

$\vec{u}\left(x;y;z\right)$ et $\vec{v}\left(x';y';z'\right)$ et $\vec{w}\left(x'';y'';z''\right)$

trois vecteurs

le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ se note : $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ et on a :

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

(On a développé suivant la première colonne)

Exemple :

$$\begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=+1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}-6\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}+(-3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-4+12-9$$

$$=-1$$

Méthode de Sarrus (Pierre-Frédéric Sarrus 1798-1861)

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{matrix}=(-2-6-12)-(3+2-24)=-1$$

Théorème : Soient $B\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base de $\mathcal{V}3$

et $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ et $\vec{v}\left(x';y';z'\right)$ et $\vec{w}\left(x'';y'';z''\right)$ trois vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=0$

Remarque : Pour calculer le déterminant de 3 vecteurs, on développe suivant n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne
en tenant compte des signes : +−+

Exemple : $B\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base et Soient

$\vec{u}\left(2;-4;3\right)$ et $\vec{v}\left(-1;1;2\right)$ et $\vec{w}\left(3;1;-1\right)$

trois vecteurs

Est-ce que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ?

Solution :

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-(-4)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=2(-1-2)+4(1-6)+3(-1-3)=-38\neq 0$$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires

Exercice : Considérons les vecteurs

$\vec{u}\left(2m+1;3;2-m\right)$ et $\vec{v}\left(-1;2;3\right)$ et $\vec{w}\left(-3;1;2\right)$

déterminer le réel m pour que les vecteurs

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

Solution :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=0$$

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} 2m+1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2-m & 3 & 2 \end{vmatrix}=(2m+1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+(2-m)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ssi $1(2m+1)-21+5(2-m)=0 \Leftrightarrow -3m=10 \Leftrightarrow m=-\dfrac{10}{3}$

Application : Résolution des systèmes de 3 équations à 3 inconnus :

Résoudre dans $\mathbb{R}3$ le système :

$$\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x-y+3z=3 \\ -x+2y+z=-1 \end{cases}$$

1) On calcul:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-15\neq 0$$

On a : $\Delta \neq 0$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-25}{-15}=\frac{5}{3}$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{2}{15}$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-12}{-15}=\frac{4}{5}$$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{5}{3};\frac{-2}{15};\frac{4}{5}\right)\right\}$

IV) Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

soit la droite (D) passant par le point $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(a;b;c\right)$

$$M\left(x;y;z\right)\in\left(D\right)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}\,/\,\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\\ z-z_A\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}x=x_A+k\times a\\ y=y_A+k\times b\\ z=z_A+k\times c\end{cases}\quad(k\in\mathbb{R})}$$

point d'attache vecteur directeur

Ce système est appelé représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(a;b;c\right)$

Remarques : Prenons l'exemple de la droite (D) de représentation $\begin{cases}x=-3+2k\\ y=-k\\ z=4+4k\end{cases}\quad(k\in\mathbb{R})$:

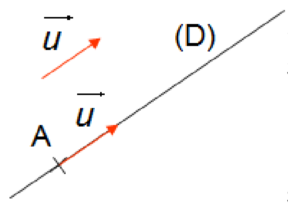
1) Le réel k est appelé le paramètre.
A chaque point de (D) correspond une et une seule valeur de k et inversement.
D'un point de vue pratique, B (3 ; 2 ; 5) appartient à (D) si et seulement si il existe k tel que :

$$\begin{cases}3=-3+2k\\ 2=-k\\ 5=4+4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=3\\ k=-2\\ k=\frac{1}{4}\end{cases}$$

Ce qui est impossible donc B n'appartient pas à (D).
2) Le paramètre est souvent également noté à l'aide de la variable t.
3) Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.
Il suffit en effet de changer de point d'attache ou de vecteur directeur pour obtenir un système de représentation différent.
4) la droite (D) passe par le point $A\left(-3;0;4\right)$ et $\vec{u}\left(2;-1;4\right)$ est un vecteur directeur de (D)

V) deux équations cartésiennes d'une droite dans l'espace

Propriété et définition : l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ et (D) la droite passant par le point $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(a;b;c\right)$



Si $abc\neq0$ alors : le système : $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ s'appelle deux équations cartésiennes de la droite(D)

Si $ab\neq0$ et $c=0$ alors : le système : $\begin{cases}\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}\\ z-z_A=0\end{cases}$ s'appelle deux équations cartésiennes de la droite(D)

Preuve :soit (D) la droite passant par le point $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(a;b;c\right)$ et soit $M\left(x;y;z\right)\in\left(D\right)$

$$M\left(x;y;z\right)\in\left(D\right)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}\,/\,\overrightarrow{AM}=k\vec{u}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x-x_A=ka\\ y-y_A=kb\\ z-z_A=kc\end{cases}$$

Si $abc\neq0$ donc $a\neq0$ et $b\neq0$ et $c\neq0$ alors :

$$\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}=k$$

Si $ab\neq0$ et $c=0$ alors :

$$\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}\text{ et }z-z_A=0$$

Exemple : soient les points $A\left(-1;1;0\right)$ et $B\left(2;-1;1\right)$ et $C\left(0;-1;2\right)$

1)Déterminer deux équations cartésiennes de la droite(AB)

Est-ce que point $C(0;-1;2)\in(AB)$?

Solution : $\overrightarrow{AB}(3;-2;1)$

Donc : $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ les deux équations cartésiennes de la droite(AB)
On remplace les coordonnées de C dans les équations de la droite(AB)
Et puisque : $\frac{0+1}{3}\neq\frac{-1-1}{-2}$ donc $C\notin(AB)$

Exercice : soit la droite (D) définie par les deux équations cartésiennes : $\frac{2x-1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{3-4z}{4}$

1) déterminer un point et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D)
2) déterminer une représentation paramétrique de la droite (D)

Solution : 1) $\frac{2x-1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{3-4z}{4}\Leftrightarrow$

$$\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3}=\frac{y-(-1)}{4}=\frac{\left(z-\frac{3}{4}\right)}{-1}\Leftrightarrow$$

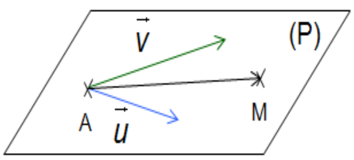
$$\frac{x-\frac{1}{2}}{6}=\frac{y-(-1)}{8}=\frac{\left(z-\frac{3}{4}\right)}{-2}$$

(D) la droite passant par le point $A\left(\frac{1}{2};-1;\frac{3}{4}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(6;8;-2)$

1)une représentation est : $\begin{cases} x=\frac{1}{2}+6k \\ y=-1+8k \\ z=\frac{3}{4}-2k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$:

V/) Représentation paramétrique d'un PLAN dans l'espace

L'espace est muni d'un repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) .
Soit $P(A;\vec{u};\vec{v})$ le plan qui passe par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a;b;c)$, $\vec{v}(a';b';c')$



$$M\in P(A;\vec{u};\vec{v})\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}:\exists k'\in\mathbb{R} / \overrightarrow{AM}=k\vec{u}+k'\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+k'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} x=x_A+k\times a+k'\times a' \\ y=y_A+k\times b+k'\times b' \\ z=z_A+k\times c+k'\times c' \end{cases}$$

point d'attache — premier vecteur directeur — second vecteur directeur

Ce système est appelé représentation paramétrique du plan $P(A;\vec{u};\vec{v})$

Exemple1 : déterminer une représentation paramétrique du plan passant par les points :
$A(2;-1;-3)$ et $B(0;1;4)$ et $C(-3;0;0)$

Solution : ABC est le plan passant par $A(2;-1;-3)$ et $\overrightarrow{AB}(-2;2;7)$ et $\overrightarrow{AC}(-5;1;3)$

Sont deux vecteurs directeurs

Donc une représentation paramétrique du plan ABC est : $\begin{cases} x=2-2t-5t' \\ y=-1+4t+t' \\ z=-3+7t+3t' \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ et $(t'\in\mathbb{R})$

Le dernier système est une représentation paramétrique du plan (ABC) c'est à dire que les coordonnées (x ; y ; z) d'un point quelconque du plan dépendent de paramètres qui sont ici t et t', mais il existe d'autre représentation paramétrique pour ce plan.

Exemple2 : déterminer les coordonnées d'un point de ce plan ainsi que les coordonnées de deux vecteurs directeurs du plan suivant définit par une représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x=3+2t-4s \\ y=2+t-s \\ z=5t-5s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3+2t-4s \\ y=2+1t-1s \\ z=0+5t-5s \end{cases}$$

vous pouvez alors en déduire que c'est un plan passant par le point
A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\quad \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\quad \vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

V//) EQUATION CARTESIENNE D'UN PLAN dans l'espace

Définition :

L'espace est muni d'un repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) .

Soit $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ le plan qui passe par $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\left(\alpha;\beta;\delta\right)$, $\vec{v}\left(\alpha';\beta';\delta'\right)$ l'équation cartésienne du plan (P) s'écrit sous forme: $ax+by+cz+d=0$ Avec : $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

Exemple : Déterminer l'équation cartésienne du plan $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ qui passe par $A(1;-3;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(-2;4;1)$ et $\vec{v}(-1;0;2)$

solution : $M(x;y;z)\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y+3;z-1)$

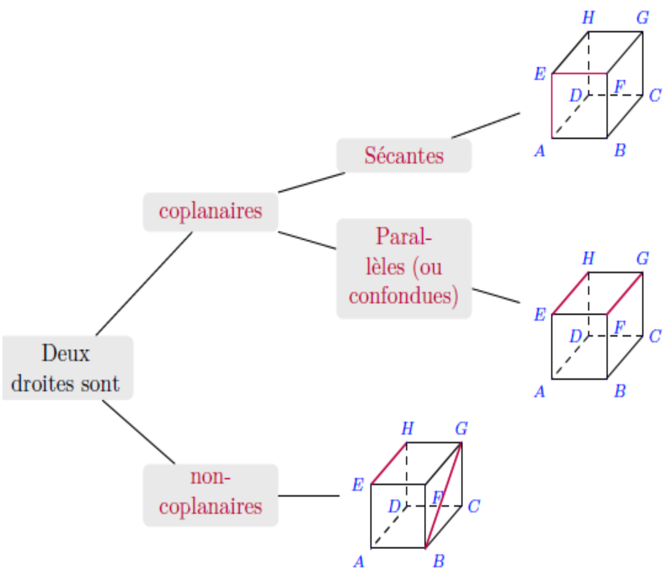
$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & -2 & -1\\ y+3 & 4 & 0\\ z-1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(x-1)\begin{vmatrix}4 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$8(x-1)+3(y+3)+4(z-1)=0\Leftrightarrow 8x-8+3y+9+4z-4=0$$

$$(P):8x+3y+4z-3=0$$

V///) Position relative de deux droites dans l'espace

1/ Position relative de deux droites dans l'espace

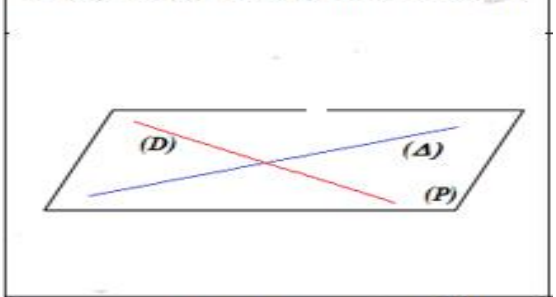


Soient $D\left(A;\vec{u}\right)$ et $\Delta\left(B;\vec{v}\right)$

On a 3 positions pour (D) et (Δ) :

Position n° 1

❶ (D) et (Δ) se coupent en un point



Ce cas se réalise lorsque $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires et le système formé par les représentations des deux droites admet une solution

Exemple1 Soient les droites (D_1) et (Δ_1) de représentations paramétriques respectives

$$(D_1)\begin{cases}x=-2+k\\ y=2-2k\\ z=4+k\end{cases}(k\in\mathbb{R})\qquad(\Delta_1)\begin{cases}x=-1-t\\ y=2t\\ z=1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (Δ_1) et (D_1)

Solution : on a : $\vec{u}(1;-2;1)$ un vecteur directeur de (D_1) et $\vec{v}(-1;2;1)$ un vecteur directeur de (Δ_1) et puisque : $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq0$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires donc les droites (Δ_1) et (D_1) sont non parallèles

on va déterminer l'intersection de (Δ_1) et (D_1)

Donc on va résoudre le système suivant :

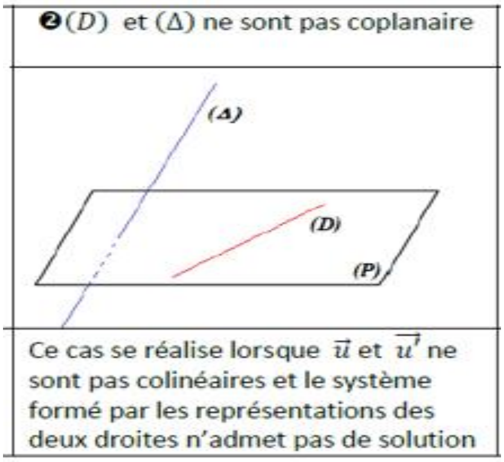
$$\begin{cases}-2+k=-1-t\\ 2-2k=2t\\ 4+k=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t+k=1\\ t+k=1\\ t-k=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t+k=1\\ t-k=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2t=4\\ t-k=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\ k=-1\end{cases}$$ On remplaçant $t=2$ dans l'équation paramétriques de (Δ_1) On trouve :

$$\begin{cases}x=-3\\ y=4\\ z=3\end{cases}$$ Donc les droites (Δ_1) et (D_1) se coupent en $E(-3;4;3)$

Position n° 2: deux droites peuvent être non coplanaires. Donc Il n'existe alors aucun plan

contenant ces deux droites.
Pour le montrer, il suffit de montrer que les deux droites ne sont ni parallèles, ni sécantes.



Exemple2 : Soient les droites (D_2) et (Δ_2) de représentations paramétriques respectives

$$(D_2)\begin{cases} x=1+k \\ y=-2-k \\ z=2+3k \end{cases} (k\in\mathbb{R}) \quad (\Delta_2)\begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=3+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (D_2) et (Δ_2)

Solution :on a $\vec{u}(1;-1;3)$ un vecteur directeur de (D_2) et : $\vec{v}(2;-1;1)$ un vecteur directeur de (Δ_2)

et puisque : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires donc les droites (D_2) et (Δ_2) sont non parallèles

on va déterminer l'intersection de (Δ_1) et (D_1)

Donc on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 1+k=2t \\ -2-k=1-t \\ 2+3k=3+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k-2t=-1 \\ k-t=-3 \\ 3k-t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k-2t=-1 \\ k-t=-3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k=-5 \\ t=-2 \end{cases}$ mais le couple $(k;t)=(-5;-2)$ ne vérifie pas l'équation $3k-t=1$

Car : $3(-5)-(-2)=-13\neq 1$

Donc le système n'admet pas de solutions

Donc les droites (Δ_1) et (D_1) sont non coplanaires

Methode2 : on a (D_2) passe par $A(1;-2;2)$ et de vecteur directeur de $\vec{u}(1;-1;3)$

et : (Δ_2) passe par $B(0;1;3)$ et de vecteur directeur de

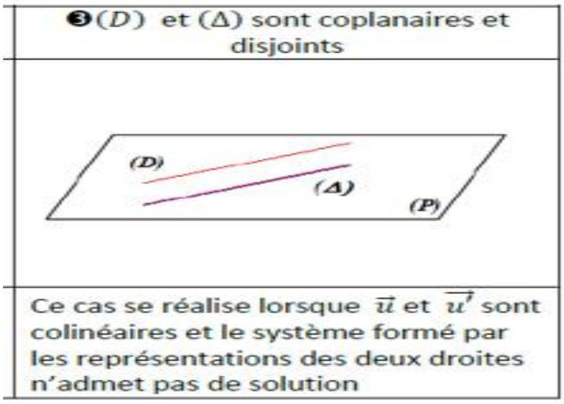
$\overrightarrow{AB}(-1;3;1)$ on va voir si les Les vecteurs $\vec{u}(1;-1;3)$ et $\vec{v}(2;-1;1)$ et $\overrightarrow{AB}(-1;3;1)$ sont coplanaires ??

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}\right)=14\neq 0$ Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont non coplanaires

Donc les droites (Δ_1) et (D_1) sont non coplanaires

Position n° 3



Exemple3 : Soient les droites (D_3) et (Δ_3) de représentations paramétriques respectives

$$(D_3)\begin{cases} x=1+k \\ y=-2 \\ z=2-1k \end{cases} \quad (k\in\mathbb{R}) \qquad (\Delta_3)\begin{cases} x=2t \\ y=1 \\ z=3-2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (D_3) et (Δ_3)

Solution : on a (D_3) passe par $A(1;-2;2)$ et de vecteur directeur de $\vec{u}(1;0;-1)$

et : (Δ_3) passe par $B(0;1;3)$ et de vecteur directeur de $\vec{v}(2;0;-2)$

on peut voir que les Les vecteurs $\vec{u}(1;0;-1)$ et $\vec{v}(2;0;-2)$ sont colinéaires

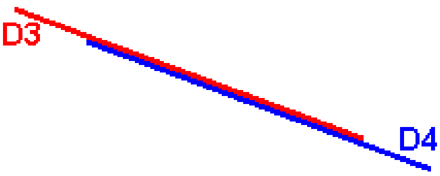
Car : $\vec{v}=2\vec{u}$ Donc les droites (D_3) et (Δ_3) sont parallèles

On remarque aussi que : $A\notin(\Delta_3)$

car $\begin{cases} 1=2t \\ -2=1 \\ 2=3-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}=t \\ -\frac{1}{2}=t \\ 2=3-2t \end{cases}$

Donc les droites (D_3) et (Δ_3) sont strictement parallèles

Position n° 4 ; les droites sont confondues



Exemple4 : L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Soient les droites (D_3) et (D_4) de représentations paramétriques respectives

$$(D_3)\begin{cases} x=k-3 \\ y=-k+3 \\ z=2 \end{cases}(k\in\mathbb{R}) \qquad (D_4)\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=2t-1 \\ z=2 \end{cases}$$

$(t\in\mathbb{R})$

Etudier la position relatif de (D_3) et (D_4)

Solution : on a (D_3) passe par $A(-3;3;2)$ et de vecteur directeur de $\vec{u}(1;-1;0)$

et (D_4) passe par $B(1;-1;2)$ et de vecteur directeur de $\vec{v}(-2;2;0)$

on peut voir que les Les vecteurs $\vec{u}(1;-1;0)$ et $\vec{v}(-2;2;0)$ sont colinéaires

Car : $\vec{v}=-2\vec{u}$ Donc les droites (D_3) et (D_4) sont parallèles

On remarque aussi que :

$A\in(D_4)$ car $\begin{cases} -3=-2t+1 \\ 3=2t-1 \\ 2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=t \\ 2=t \\ 2=2 \end{cases}$

Donc les droites (D_3) et (D_4) sont confondues

Exercice : Soient les droites (D) et (D') de représentations paramétriques respectives :

$$(D)\begin{cases} x=k \\ y=1-k \\ z=3-2k \end{cases}(k\in\mathbb{R}) \qquad (D')\begin{cases} x=2+6k' \\ y=-3-12k' \\ z=4+3k' \end{cases}(k'\in\mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (D) et (D')

Solution :

M(x;y;z) appartient à (D) et (D') si et seulement si il existe k et k' réels tels que :

$$\begin{cases} k=2+6k' \\ 1-k=-3-12k' \\ 3-2k=4+3k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2+6k' \\ 1-2-6k'=-3-12k' \\ 3-2k=4+3k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ k'=-\frac{1}{3} \\ 3-2k=4+3k' \end{cases}$$

Cette dernière égalité sert à vérifier notre résultat :

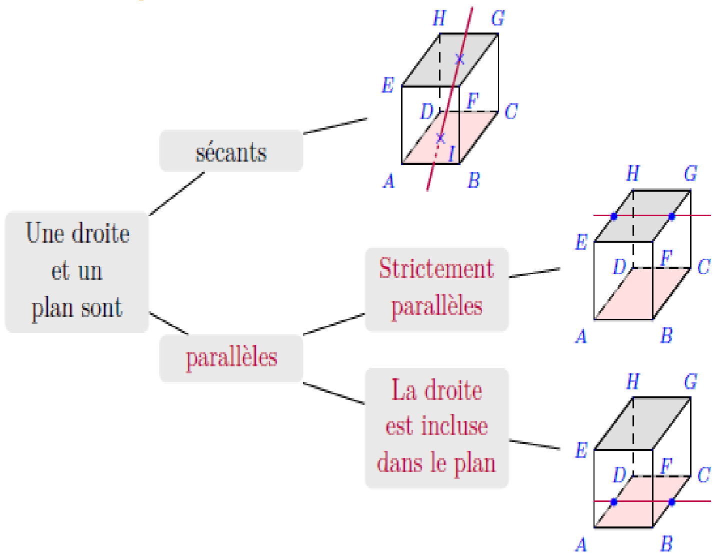
3 - 2k = 3 - 0 = 3 et 4 + 3k' = 4 - 1 = 3.

$k=0$ et $k'=-\frac{1}{3}$ donc (D) et (D') possèdent un unique point commun C

Dont les coordonnées peuvent être calculées à l'aide de k ou k' : $C(0;1;3)$

(D) et (D') sont alors contenues dans le plan (P) passant par C et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1;-1;-2)$ et $\vec{v}(6;-12;3)$

2/ Position relative d'une droites et d'un plan dans l'espace



L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Proposition1 : La droite $D(A;\vec{u})$ et le plan $P(B;\vec{v};\vec{w})$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et dans le cas contraire la droite coupe le plan

Proposition2 : soit la droite (D) passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ et un plan (P) d'équation cartésienne: $ax+by+cz+d=0$

(D) // (P) si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$

(D) coupe (P) si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$

Preuve : une représentation paramétrique de La droite $D(A;\vec{u})$ est $(D)\begin{cases}x=k\alpha+x_A\\ y=k\beta+y_A\\ z=k\gamma+z_A\end{cases}(k\in\mathbb{R})$

M(x;y;z) appartient à (D) et (P) si et seulement si il existe k tels que :

$$\begin{cases}x=k\alpha+x_A\\ y=k\beta+y_A\\ z=k\gamma+z_A\\ ax+by+cz+d=0\end{cases}$$

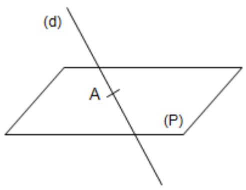
donc : $a(k\alpha+x_A)+b(k\beta+y_A)+c(k\gamma+z_A)+d=0$

donc : $k(a\alpha+b\beta+c\gamma)=-(ax_A+by_A+cz_A)-d$

- **si :** $a\alpha+b\beta+c\gamma k\neq 0$ alors :

$$k=\frac{-(ax_A+by_A+cz_A)-d}{a\alpha+b\beta+c\gamma}$$

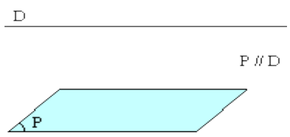
donc (D) coupe (P) en un point unique



- **si :** $a\alpha+b\beta+c\gamma k=0$ et $ax_A+by_A+cz_A+d=0$ alors : $(D)\subset(P)$
- **si :** $a\alpha+b\beta+c\gamma k=0$ et $ax_A+by_A+cz_A+d\neq 0$

alors : $(D)\cap(P)=\varnothing$

Donc (D) strictement parallèles a (P)



Exemple1 : Soient la droite (D_1) de représentations paramétrique $(D_1)\begin{cases}x=-4t+2\\ y=2t-1\\ z=3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

et le plan (P_1) d'équation cartésienne:

$(P_1):3x+2y+z+1=0$

Etudier la position relatif de (D_1) et (P_1)

Solution :

on a (D_1) est de vecteur directeur $\vec{u}(-4;2;3)$

Et on a : $3(-4)+2\times 2+3\neq 0$

donc (D_1)) coupe (P_1) en un point unique

on a $M(x;y;z)\in(D_1)\cap(P_1)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}/$

$$\begin{cases}x=-4t+2\\ y=2t-1\\ z=3t\\ 3x+2y+z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4t+2\\ y=2t-1\\ z=3t\\ 3(-4t+2)+2(2t-1)+3t+1=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\ x=-2\\ y=1\\ z=3\end{cases}$ donc (D_1)) coupe (P_1)

au point $A(-2;1;3)$

Exemple2 :

Soient la droite (D_2) de représentations paramétrique $(D_2)\begin{cases}x=-4+5t\\ y=-1-2t\\ z=-3+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

et le plan (P_2) d'équation cartésienne:

$(P_1):x+3y+z+4=0$

Etudier la position relatif de (D_2) et (P_2)

Solution :on a (D_2) est de vecteur directeur $\vec{u}(5;-2;1)$ et on a : $5+3(-2)+1=0$

donc (D_2) est parallèle a (P_2)

on va déterminer l'intersection de (D_2) et (P_2)

Donc on va résoudre le système suivant :

on a $M(x;y;z)\in(D_2)\cap(P_2)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=-4+5t\\ y=-1-2t\\ z=-3+t\\ x+3y+z+4=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4+5t\\ y=-1-2t\\ z=-3+t\\ (-4+5t)+3(-1-2t)+-3+t+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4+5t\\ y=-1-2t\\ z=-3+t\\ -6=0\end{cases}$$

Donc le système n'admet pas de solutions

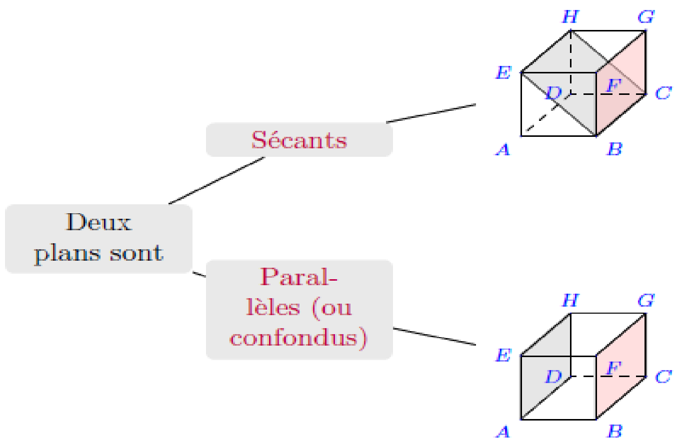
donc (D_2) ne coupe pas le plan (P_2)

Donc (D_2) strictement parallèles a (P_2)

Remarque1 : si $(D)//(P)$ alors Tout vecteur directeur de (D) est alors un vecteur directeur de (P)

Remarque2: Il existe plusieurs façons de montrer qu'une droite (D) est incluse dans un plan (P).Une première méthode consiste à montrer dans un premier temps que (D) est parallèle à (P) puis dans un deuxième temps qu'un point de (D) appartient à (P).

3)position relative de deux plans :

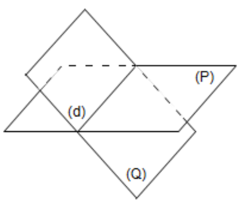


Proposition : Soient deux plans (P) et (P') d'équations cartésiennes:

$(P): ax+by+cz+d=0$ et

$(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$

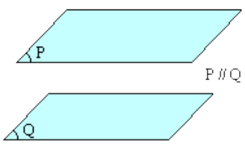
1) (P) et (P') se coupent si et seulement si



$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \neq 0$

et leur intersection est une droite

2) $(P)//(P')$ si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0$



si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $c \neq 0$

$(P)//(P') \Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

Exemple1 :

L'espace est muni d'un repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$)

Soient deux plans (P) et (P') d'équations cartésiennes:

$(P): 2x+y-z+2=0$ et $(P'): 3x+y+4z-1=0$

Etudier la position relatif de (P) et (P')

Solution : on a : $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc (P) et (P') se coupent suivant une droite (D)

Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et (P')

(D) a pour système d'équations cartésiennes :

$M(x;y;z) \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ 3x+y+4z-1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+y=z-2 \\ 3x+y=-4z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3z+3 \\ y=-5z-8 \end{cases}$ et on pose $(z=t)$

Donc : $(D)\begin{cases} x=3+3t \\ y=-8-5t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$

(D) est la droite qui passe par le point $A(-3;-8;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-5;1)$

Exemple2 :

L'espace est muni d'un repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$)

Soient deux plans (Q) et (Q') d'équations cartésiennes:

$(Q): (1-\sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + z - \sqrt{2} = 0$ et

$(Q'): (\sqrt{2}-2)x - y + \sqrt{2}z - 2 = 0$

Etudier la position relatif de (Q) et (Q')

Solution : on a : $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}-2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ et

$\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$

donc $(Q) \; // \; (Q')$

et puisque : $-\sqrt{2} \neq -2$

(Q) et (Q') sont strictement parallèles

4/ Droite d'intersection de deux plans

Il est souvent demandé dans les exercices de trouver la représentation paramétrique d'une droite qui est l'intersection de deux plans.
Ou encore de montrer qu'une droite dont on connaît la représentation paramétrique est l'intersection de deux plans donnés. Voyons les différentes stratégies qu'il est possible d'employer :

<u>Exemple</u>: Soient les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives :

$(P): x-y-3z-2=0 \quad (Q): 2x+y+z-1=0$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et de (Q).
Solutions :(D) a pour système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x-y-3z-2=0 \\ 2x+y+z-1=0 \end{cases}$$

Il va donc falloir être capable de passer de ce système à une représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x-y-3z-2=0 \\ 2x+y+z-1=0 \end{cases}$$

Une technique consiste à prendre une des coordonnées comme paramètre,
par exemple puis à exprimer les deux autres coordonnées en fonction de z.

$$\begin{cases} x=y+3z+2 \\ 2(y+3z+2)+y+z-1=0 \\ z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+3z+2 \\ 3y+7z+3=0 \\ z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-\frac{7}{3}z+3z+2 \\ y=-1-\frac{7}{3}z \\ z=z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\frac{2}{3}z \\ y=-1-\frac{7}{3}z \\ z=z \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de (D) est

donc : $(D)\begin{cases} x=1+\frac{2}{3}k \\ y=-1-\frac{7}{3}k \\ z=0+1k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

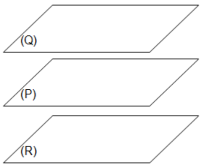
(D) passe donc par le point A (1 ; -1 ; 0) et a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{2}{3};\frac{-5}{3};1\right)$

5/ Intersection de trois plans(méthodes)

Soient (P), (Q) et (R), 3 plans de l'espace.

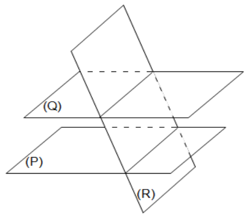
Cas n° 1 : les plans (P) et (Q) sont parallèles.

Sous cas n° 1.1 : (P) et (R) sont parallèles.



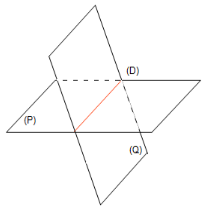
Alors, (R) est également parallèle à (Q).
L'intersection entre (P), (Q) et (R) est alors l'ensemble vide.

Sous cas n° 1.2 : (P) et (R) sont sécants.



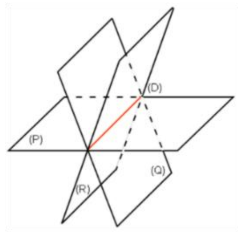
Alors, (R) et (Q) sont également sécants
L'intersection entre (P), (Q) et (R) est alors l'ensemble vide.

Cas n° 2 : les plans (P) et (Q) sont sécants suivant la **droite** (D)



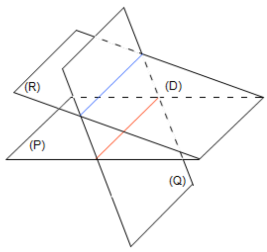
Sous cas n° 2.1 : (D) est parallèle à (R).

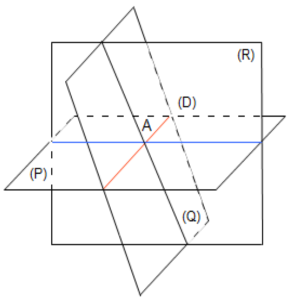
Sous cas n° 2.1.1 : (D) est contenue dans (R).
L'intersection entre (P), (Q) et (R) est alors la droite (D).



Sous cas n° 2.1.2 : (D) est strictement parallèle à (R).
L'intersection entre (P), (Q) et (R) est alors l'ensemble vide.

Sous cas n° 2.2 : (D) et (R) sont sécants.





L'intersection entre (P) et (Q) est alors un point.
Pour trouver les coordonnées de ce point, on pourra commencer par trouver une représentation paramétrique de (D) puis, chercher le point d'intersection entre (D) et (R).

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien