FONCTIONS - *Généralités*

1) Définitions d'une fonction et Domaine de définitions

1-1) Définition :

Une ***fonction*** est un procédé qui à un nombre x appartenant à un ensemble D associe un nombre y.

On note : $f : x \mapsto y$ ou encore $y = f(x)$

- On dit que y est l'image de x par la fonction f
- On dit aussi que x est un antécédent de y par la fonction f

1-3) Domaine de définitions : Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f que l'on notera D_f

2) Fonctions paires et Fonctions impaires

2.1. Fonction paire : On dit qu'une fonction *f* est paire si et seulement si :a) Pour tout réel x, si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$

b) Pour tout réel x de D_f, on a : $f(-x) = f(x)$

2.3. Fonction impaire : On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

a) Pour tout réel x, si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$

b) Pour tout réel x de D_f, on a : $f(-x) = -f(x)$

2.4 le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

3) Les variations d'une fonction numérique

3-1) Sens de variation d'une fonction :fonction croissante -décroissante -fonction constantes

Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que : Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \prec f(x_2)$ $\left(f(x_1) \leq f(x_2)\right)$

Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

- Dire f que est strictement décroissante sur I (décroissante sur I) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ $\left(f(x_1) \geq f(x_2)\right)$

Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

- Dire f que est constante sur I signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$

alors $f(x_1) = f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I .On dit que f est constante sur I ssi il existe un réel k tq: $f(x) = k$ pour tout $x \in I$

3-2) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

- On dit que f est strictement croissante(croissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \succ 0$ $\left(\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0\right)$
- On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \prec 0$ $\left(\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0\right)$
- On dit que f est constante sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = 0$

3-3) les variations et la parité :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

Si f est paire alors :

- f est croissante sur I ssi f est décroissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est croissante sur I'

Si f est impaire alors :

- f est croissante sur I ssi f est croissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est décroissante sur I'

Conséquences :

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

4) Les variations des deux fonctions : αf et f+α

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}^*$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ alors les fonctions f et αf ont les mêmes variations sur I
- Si $\alpha \in \mathbb{R}^{*-}$ alors les fonctions f et αf ont des variation opposées sur I
- f et α+f ont les mêmes variations sur I

5) comparaison deux fonctions (fonctions positives et négatives) et Fonctions majorées ; minorées et bornée

6-1) Comparaison de fonctions

Définition 1 : On dit que deux fonction f et g sont égales si et seulement

si : Elles ont même ensemble de définition : $D_f = D_g = \mathbb{R}$

et Pour tout $x \in D_f$: f (x) = g(x) et On écrit : $f = g$

6-2) Définitions : Soit I un intervalle et soient f et g deux fonctions définies Sur I. On dit que :

1)f est inférieure à g sur I lorsque : $f(x) \le g(x)$ pour tout $x \in I$. On note : $f \le g$ Sur I.

2)f est positive sur I lorsque : $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in I$.

On note : $f \ge 0$ sur I.

3)f est **majorée** sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $f(x) \le M$ pour tout $x \in I$

4)f est **minorée** sur I lorsqu'il existe un réel m tel que : $m \le f(x)$ pour tout $x \in I$

5)f est **bornée** sur I lorsqu'il existe des réels Met m tels que : $m \le f(x) \le M \ \forall x \in I$.

(f est majorée et minorée)

Interprétation graphique :

1) $f(x) \le g(x)$ pour tout $x \in I$ ssi La courbe (C_g) de la fonction g est au-dessus de La courbe (C_f) de f sur l'intervalle I

2) $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in I$ ssi La courbe (C_f) de la fonction f est au-dessus de l'axe des abscisse sur l'intervalle I

6) Les extremums d'une fonction numérique

7-1)) Définitions : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

- Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) ssi pour tout que $\forall x \in I : f(x) \le f(a)$
- Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) ssi pour tout $\forall x \in I$: $f(x) \ge f(a)$

7) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

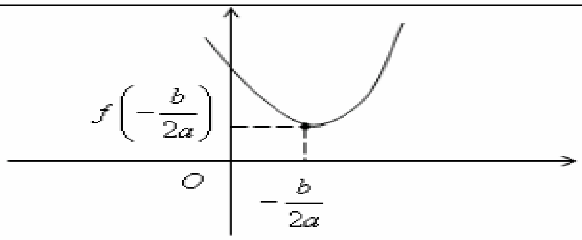
7-1)Résumé : $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $a \ne 0$

1° Dans le repére $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$

2° Les variations de f

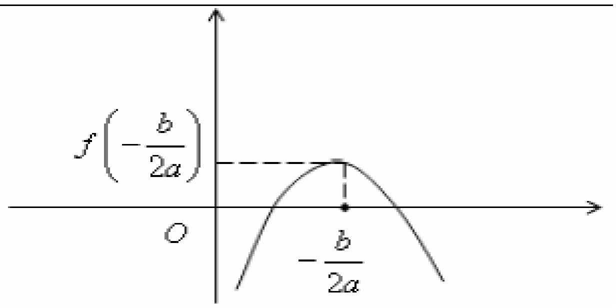
Si $a \succ 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$



Si $a \prec 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\searrow$



7-2) Exemple :

1° Soit f une fonction numérique

tq : $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$

on a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

On a $a = 2$ et $b = -4$ et $c = -2$ $\left(f(x) = ax^2 + bx + c\right)$

Donc $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{2\times 2} = 1$ et $\left(f(1) = 2 - 4 - 2 = -4\right)$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = 2(x-1)^2 - 4$

Soit $W(1;-4)$ Donc dans le repére $(0;\vec{i};\vec{j})$ l

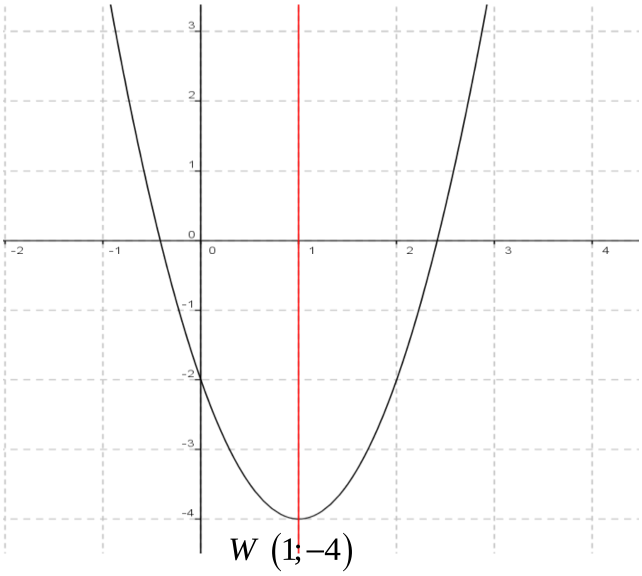
a courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1;-4)$

et d'axe de symétrie la droite $x = 1$

Tableau de variations de f

On a $a = 2 \succ 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$



$W\ (1;-4)$

8) Etude et représentation graphique des fonctions homographique : $x \xrightarrow{f} \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $a \neq 0$ et $c \neq 0$

8-1)Résumé et propriété :1)Soit f une fonction tq :

$f\ (x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $cx+d \neq 0$ ssi

$x \neq -\dfrac{d}{c}$ donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

dans le repére $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (C_f) est l'hyperbole de centre

$W\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations

respectives $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$

1iér cas : si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \succ 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

2iér cas : si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \prec 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

8-2) Exemples :

Exemple1: Soit f une fonction numérique tq :

$f\ (x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-1 = -3 \prec 0$

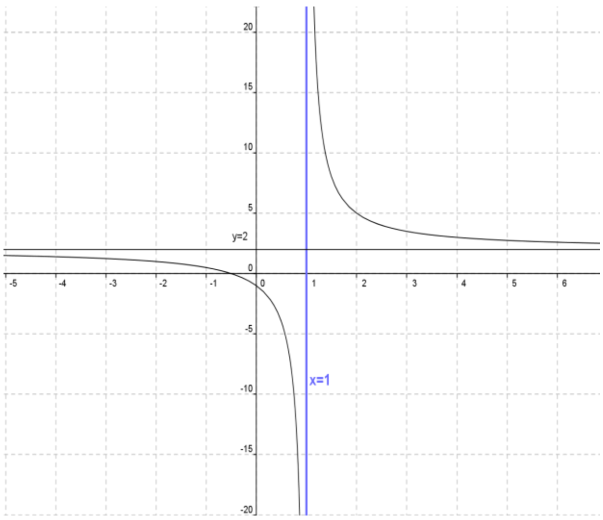
• Donc le tableau de variations de $x \longrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

- Représentation graphique

-2	1-	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = 1$ et $y = 2$



9) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} ax^3$

Exemple : Soit f une fonction numérique définie par :

$f\ (x) = \dfrac{1}{4}x^3$

1) Déterminer D_f

2)étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3)tracer la dans le repére $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ de f

Solutions : 1) $D_f = x \in \mathbb{R}$

2)soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 < x_2$

Donc : $x_1^3 < x_2^3$ Donc : $\frac{1}{4}x_1^3 < \frac{1}{4}x_2^3$

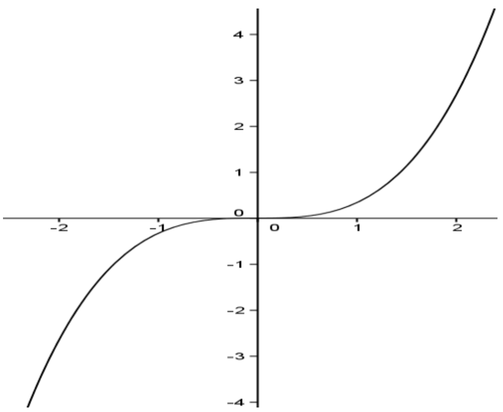
Donc : $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5



10) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} \sqrt{a+x}$

Exemple : Soit f une fonction numérique définie par :

$f\left(x\right) = \sqrt{x+2}$

1) Déterminer D_f

2)étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3)tracer la dans le repére $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ de f

Solutions : 1)

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\right\} = \left[-2,+\infty\right[$

2)soient $x_1 \in \left[-2;+\infty\right[$ et $x_2 \in \left[-2;+\infty\right[$ tq $x_1 < x_2$

Donc : $x_1 + 2 < x_2 + 2$ Donc : $\sqrt{x_1+2} < \sqrt{x_2+2}$

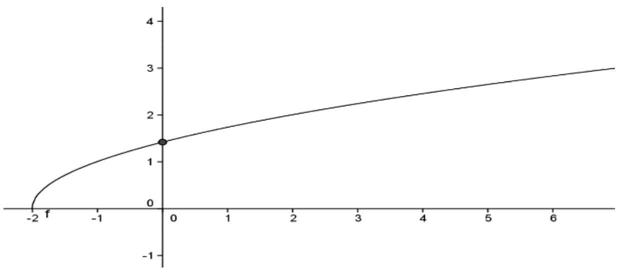
Donc : $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation :

x	-2	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$

x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



11) Fonction Partie entière

12-1)Définition : Soit x un nombre réelle

La partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Notation : La partie entière de x est maintenant notée :

$E\left(x\right)$ **ou** $\left[x\right]$

Exemples : $E\left(4,2\right) = 4$ **;** $E\left(-3,75\right) = -4$ **;**

12-2)Propriétés :1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $E\left(x\right) \leq x \prec E\left(x\right)+1$

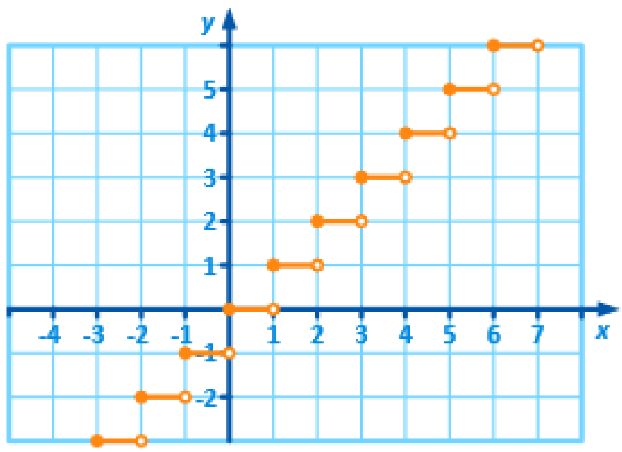
2) $\forall x \in \mathbb{Z}$ $E\left(x\right) = x$

Un nombre x est entier si et seulement si il est égal à sa partie entière

2) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{Z}$ $E\left(x+n\right) = n + E\left(x\right)$

12-3) représentation graphique de la fonction $x \to E\left(x\right)$ **:**

$\forall k \in \mathbb{Z}$ Si $k \leq x \prec k+1$ alors $E\left(x\right) = k$ donc Voici la courbe représentative de la fonction partie entière :



12)La composée de deux fonctions

12-1) Définition : Soit la fonction définie sur l'ensemble I et g la fonction définie sur l'ensemble J tel que :

$\forall x \in I \quad f(x) \in J$

La composée des deux fonctions f et g est la fonction noté : $g \circ f$ définie sur I par : $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in I$

On peut alors faire le schéma suivant :

$x \to f(x) = y \to g(f(x)) = z$

Remarque : 1)La composée de deux fonctions n'est pas commutative

c.-à-d. $g \circ f \neq f \circ g$

2)Soit Df et Dg les ensembles de définition des fonctions f et g. $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f et f(x) \in D_g\}$

12-2) Variations d'une fonction composée

Théorème : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et une fonction g définie sur f (I).

➪ Si f et g ont même variation respectivement sur I et f (I) alors la fonction $g \circ f$ Est croissante sur I.

➪ Si f et g ont des variations opposées respectivement sur I et f (I) alors là fonction $g \circ f$ est décroissante sur I.

13) Fonctions périodiques :

Définition :On considère une fonction réelle f dont on note D l'ensemble de définition.

On dit que f est périodique de période T si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) $\forall x \in D$ on a $x + T \in D$

b) $\forall x \in D$ on a $f(x+T) = f(x)$

et la période de f c'est le plus petit réelle strictement positif qui vérifie les conditions

Exemple de fonctions périodiques :

1. Une fonction constante sur $\mathbb{R}$ est périodique ; tout réel non nul en est une période.

2. La fonction $x \to E(x)$ est périodique, 1 est une période ainsi que tout entier non nul.

3. les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période $T = 2\pi$

4.la fonction tangente est périodique de période $T = \pi$

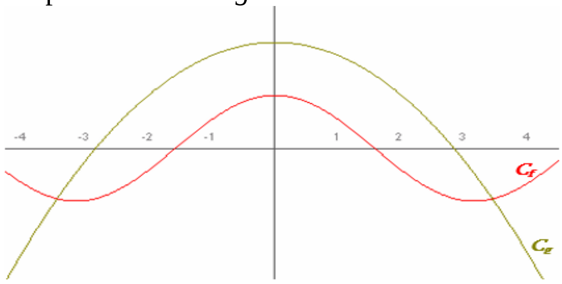
5. La période des fonctions: $f : x \to \cos(ax)$ et $f : x \to \sin(ax)$ $a \neq 0$ est $T = \frac{2\pi}{a}$

Remarque : La périodicité permet de réduire l'étude des variations d'une fonction à un intervalle de longueur égale à la période. Donc pour tracer la représentation graphique d'une fonction T-périodique, il suffit donc de construire la courbe sur un intervalle de longueur T puis de translater autant de fois que nécessaire.

14) Applications : Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

1) Position relative de deux courbes et intersection

Soient (C_f) la courbe représentative de f et (C_g) la courbe représentative de g.



On a les relations suivantes :

$M(x;y) \in (C_f)$ ssi $y = f(x)$

$M(x;y) \in (C_g)$ ssi $y = g(x)$

Aux points d'intersection de (C_f) et de (C_g), on a

$M \in (C_f)$ et $M \in (C_g)$ donc

soit $f(x) = g(x)$

A retenir :

- les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points D'intersection de (C_f) et de (C_g)
- les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessus de (C_g) .
- les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au- dessous de (C_g)

Un cas particulier :

équation $f(x) = m$ et inéquation $f(x) \geq m$

- Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = m$
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq m$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y = m$.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

Prof : Atmani najib