PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$

Etude analytique (2) -Applications- : cercle

Dans tout ce qui va suivre le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé.

I) EQUATION D'UN CERCLE

Définition : Soient Ω un point et r un réel positif, le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M dans le plan $(\mathcal{P})$ qui vérifient : $\Omega M = r$ on le note, $\mathcal{C}(\Omega,r)$: $C\left(\Omega;r\right) = \{\boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{\mathcal{P}}) / \boldsymbol{\Omega M} = \boldsymbol{r}\}$

Remarque :
On peut considérer le point comme étant un cercle de rayon nul.

1) Cercle défini par son centre et son rayon.

Soient $\Omega(a, b)$ un point et r un réel positif,

$M(x, y) \in C\left(\Omega;r\right) \Leftrightarrow \Omega M = r$

$\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Exemple : déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon $r=3$

Solution : l'équation cartésienne du cercle est :

$\mathcal{C}(\Omega,r)$: $(x+1)^2+(y-2)^2=3^2$

C a d : $x^2+y^2+2x-4y-4=0$

Propriété : Soient $\Omega(a, b)$ un point et r un réel positif, le cercle $\mathcal{C}(\Omega,r)$ à une équation cartésienne de la forme : $\mathcal{C}(\Omega,r)$: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

2) Equation réduite d'un cercle

On a : $M(x, y) \in \mathcal{C}(\Omega,r) \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où : $\alpha = -2a$; $\beta = -2b$ et $\gamma = a^2 + b^2 - r^2$

Propriété1 : Tout cercle dans le plan à une équation de la forme : $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$
où α , β et γ sont des réels.

Propriété2 : Soit (C) L'ensemble des points $M\left(x;y\right)$ du plan tel que :

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

avec a ; b ; c des réelles

• Si : $a^2+b^2-c \succ 0$
alors (C) est une cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

• Si : $a^2+b^2-c=0$ alors $(C)=\{\Omega(a;b)\}$

• Si : $a^2+b^2-c \prec 0$ alors $(C)=\varnothing$

PREUVE : $M\left(x;y\right)\in(C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

$\Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2+c-a^2-b^2=0$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-c=0$

• Si : $a^2+b^2-c \succ 0$ alors (C) est une cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

• Si : $a^2+b^2-c=0$ alors $(C)=\{\Omega(a;b)\}$

• Si : $a^2+b^2-c \prec 0$ alors $(C)=\varnothing$

Exemples : Déterminer L'ensemble (E) dans les cas suivants :

1) (E): $x^2+y^2-x+3y-4=0$

2) (E): $x^2+y^2-6x+2y+10=0$

3) (E): $x^2+y^2-4x+5=0$

Solutions : 1) $a=\frac{1}{2};b=-\frac{3}{2};c=-4$

On a : $a^2+b^2-c=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-(-4)=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+4=\frac{13}{2}>0$

Donc : $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ donc $\Omega(\frac{1}{2};\frac{-3}{2})$

$R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

alors (E) : est une cercle de centre

$\Omega(\frac{1}{2};\frac{-3}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$

2) $a=3;b=-1;c=10$ $a^2+b^2-c=3^2+(-1)^2-10=9+1-10=0$

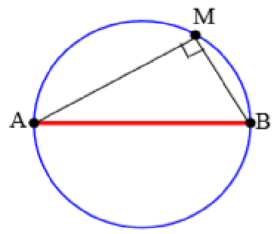
alors $(E)=\{\Omega(3;-1)\}$

3) $a=2;b=0;c=5$

$a^2+b^2-c=4-5=-1<0$ alors $(E)=\varnothing$

3) Cercle définie par son diamètre.

Propriété : (Rappelle)
Soient A et B deux points distincts dans le plan l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.Ce qui nous permet d'énoncer la propriété suivante :



Propriété : Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts dans le plan, le cercle de diamètre $[AB]$ à pour équation :

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

Exemple :Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1;2)$ et $B(-3;1)$

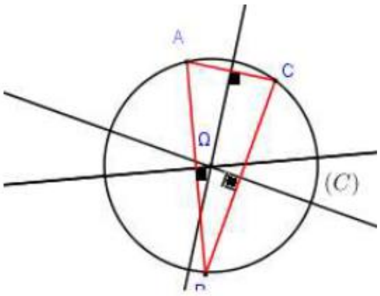
solution : $M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$\overrightarrow{MA}(1-x;2-y)$ et $\overrightarrow{MB}(-3-x;1-y)$

$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow(-3-x)(1-x)+(1-y)(2-y)=0$

Donc : $(C):x^2+y^2+2x-3y-1=0$

4) cercle définie par trois points ou Cercle circonscrit à un triangle



Soit ABC un triangle, les médiatrices du triangle ABC se coupent en Ω le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC

Exemple : le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. Soient les points

$A(2;3)$ $B(0;1)$; $C(-4;5)$; $E(5;2)$ et $F(2;4)$

1)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC.

2)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF.

Solution : 1)Soient $I(1;2)$ et $J(-1;4)$ le milieu respectivement du segments : $[AB]$ et $[AC]$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[AB]$donc (Δ) passe par $I(1;2)$ et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur normal a (Δ)

Et on a : $\overrightarrow{AB}(-2;-2)$ donc une équation de (Δ) est :

$(\Delta):-2(x-1)-2(y-2)=0$

Donc : $(\Delta):-2x+2-2y+4=0$ donc $(\Delta):-2x-2y+6=0$

donc $(\Delta):x+y-3=0$ (après simplifications)

Et soit (Δ') la médiatrice de $[AC]$donc (Δ') passe par $J(-1;4)$ et $\overrightarrow{AC}$ un vecteur normal a (Δ') et on a : $\overrightarrow{AC}(-6;2)$ donc une équation de (Δ') est :

$(\Delta'):-6(x+1)+2(y-4)=0$ donc : $(\Delta'):3x-y+7=0$

On a Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (Δ') on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases}(\Delta):x+y-3=0\\(\Delta'):3x-y+7=0\end{cases}$$

Et la solution de ce système est : $(-1;4)$ donc $\Omega(-1;4)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est :

$r=A\Omega=\sqrt{(-1-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{10}$

Et l'équation du cercle est : $(x+1)^2+(y-4)^2=10$

$(C):x^2+y^2+2x-8y+7=0$

2)déterminons l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF.

On sait que l'équation du cercle s'écrit sous la forme :

$(C'):x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

Et on a : $O\in(C')\Leftrightarrow c=0$

$E(5;2)\in(C')\Leftrightarrow 25+4-10a-4b=0$

$F(2;4)\in(C')\Leftrightarrow 4+16-4a-8b=0$

on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases}10a+4b=29\\a+2b=5\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{19}{8}\\b=\dfrac{21}{16}\\c=0\end{cases}$$

Et l'équation du cercle est :

$(C'):x^2+y^2-\dfrac{19}{4}x-\dfrac{21}{8}y=0$

II) L'INTERIEUR ET L'EXTERIEUR D'UN CERCLE.

Définition : Soit $C(\Omega;r)$ un cercle dans le plan.

a) L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M \leq r$ s'appelle la boule fermée de centre Ω et de rayon r, il s'appelle aussi l'intérieur du cercle $C(\Omega;r)$

b) L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M > r$ s'appelle l'extérieur du cercle $C(\Omega;r)$

Application : La résolution graphique de quelques systèmes d'inéquation

Exemple : Nous allons résoudre graphiquement le système :

$$(S)\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y+\dfrac{11}{4}\prec 0 \\ x^2+y^2+2x-4\succ 0 \end{cases}$$

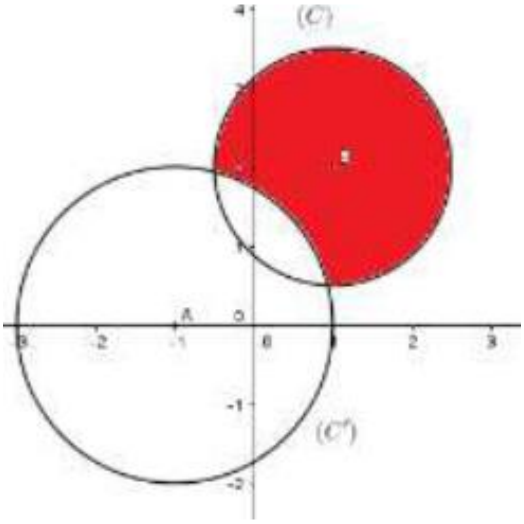
$$x^2+y^2-2x-4y+\frac{11}{4}=0$$

est l'équation du cercle $(\mathcal{C})$

de centre $B(1,2)$ et de rayon $r=\dfrac{3}{2}$

$x^2+y^2+2x-4=0$ est l'équation du cercle $(\mathcal{C}')$ de centre $A(-1,0)$ et de rayon $r'=2$.

L'ensemble des points M qui vérifient (S) est l'extérieur de $(\mathcal{C}')$ intersection l'intérieur de $(\mathcal{C})$



Exercice1 : résoudre graphiquement le système :

$$(S)\begin{cases} (1): x^2+y^2-4x\prec 0 \\ (2): x-y-1\succ 0 \end{cases}$$

Solution :

- $(1): x^2+y^2-4x\prec 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2\prec 2^2$

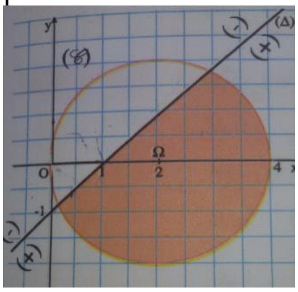
Donc les solutions de cette inéquation c'est les couples $(x;y)$ des points qui se trouvent à l'intérieurs du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $r=2$

- $(2): x-y-1\succ 0$: les solutions de cette inéquation c'est les couples $(x;y)$ des points qui se trouvent au-dessous de la droite d'équation : $(\Delta): x^2+y^2-4x=0$

(demi plan qui contient $\Omega(2;0)$

Car $:2-0-1=1\succ 0$)

Finalement l'ensemble des solutions du système c'est les couples $(x;y)$ des points qui appartiennent à la partie colorée.



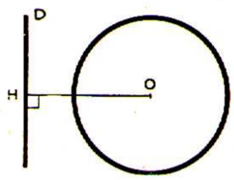
Exercice2 : Résoudre graphiquement $(x^2+y^2-4x-6y+9)(2x-y+1)\leq 0$

III) POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE EST D'UNE DROITE.

1) Propriété

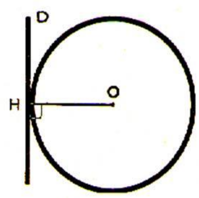
Soit $C(O;r)$ un cercle de rayon r strictement positif et (D) une droite dans le plan. Pour étudier les positions relatives du cercle $C(O;r)$ de (D), il suffit de déterminer la distance de O à (D). soit H la projection orthogonal de O sur (D)

1)Si $d(O;(D))=OH\succ r$



Soit M un point de la droite (D) on a :
$OM \geq OH > r$ donc tout point de la droite (D) est strictement à L'extérieure du cercle $(\mathcal{C})$
$(\mathcal{C}) \cap (D) = \emptyset$

2) $d(O;(D))=OH=r$



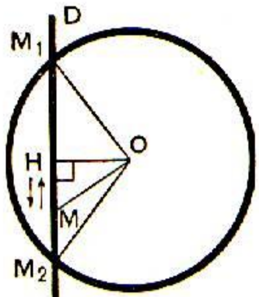
Puisque $OH = r$ alors H est un point commun entre (D) et $(\mathcal{C})$.
Soit M un point de la droite (D) Différent de H on a :
$OM > OH = r$

Donc tout point de la droite (D) différent de H est strictement à L'extérieure du cercle $(\mathcal{C})$.

$(\mathcal{C}) \cap (D) = \{H\}$ Ont dit que la droite (D) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en H

3) $d(O, (D)) = \Omega H < r$

Dans ce cas le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite(D) se coupent en deux points M_1 et M_2 et H est le milieu du segment $[M_1M_2]$



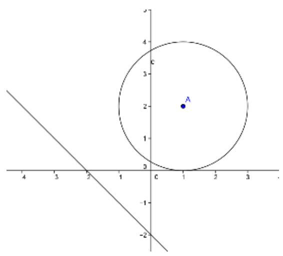
Exemple1 :Etudier la position du cercle de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=2$ avec la droite d'équation $(D): x+y+2=0$

Solution : on calcul $d(\Omega,(P))$?

$$d(\Omega,(P))=\frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>R=2$$

Donc : droite (D) est à L'extérieure du cercle $(\mathcal{C})$

$(\mathcal{C}) \cap (D) = \emptyset$



Exemple2 :Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=2$ avec la droite d'équation $(D): x-y+2=0$

Solution : on calcul $d(\Omega,(P))$?

$$d(\Omega,(P))=\frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<R=2$$

Donc : le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite (D) se coupent en deux points A et B

Déterminons les coordonnées des points d'intersections ?

On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ (x-1)^2+(y-2)^2=(2)^2 \\ (2)\ x-y+2=0 \end{cases}$$

On a : $(2) \Leftrightarrow x+2=y$

On remplaçant dans (1) $y=x+2$

On trouve : $(1)\ (x-1)^2+(x+2-2)^2=(2)^2$

Donc : $(x-1)^2+(x)^2=4 \Leftrightarrow x^2-2x+1+x^2=4$

Donc : $2x^2-2x-3=0 \quad \Delta=28$

Donc : $x_1=\frac{2+2\sqrt{7}}{4}$ et $x_2=\frac{2-2\sqrt{7}}{4}$

Donc : $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ et $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

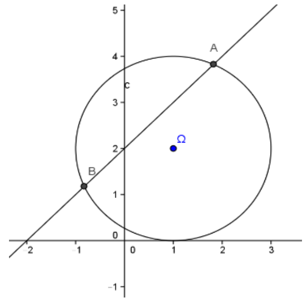
Si : $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ on remplace dans $x+2=y$

On trouve : $y_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}+2=\frac{5+\sqrt{7}}{2}$

Si : $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ on remplace dans $x+2=y$

On trouve :

$y_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}+2=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$



Donc : les points d'intersections sont :

$A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2};\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$ et

$B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2};\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$

Exemple3 :Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=1$ avec la droite d'équation $(D): y=3$

Solution : on calcul $d(\Omega,(P))$?

$(D): 0x+1y-3=0$

$$d(\Omega,(P))=\frac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{1}}=1=R$$

Donc : la droite (D) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A

Déterminons les coordonnées du point d'intersection ou point de tangence ?

L'équation de $(\mathcal{C})$ est $(x-1)^2+(y-2)^2=1^2$

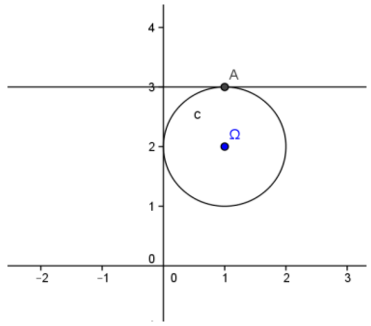
On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ (x-1)^2+(y-2)^2=1 \\ (2)\ y=3 \end{cases}$$

On remplaçant dans $y=3$ dans (1)

On aura :

$$(1)(x-1)^2+1=1 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0$$



Donc : $x=1$ donc point de tangence est $A(1;3)$

2) Droite tangente à un cercle.

2.1 Définition

Dans tous ce qui suit le rayon du cercle est strictement positif.

Définition : Une droite (D) est dite tangente à un cercle $(\mathcal{C})$ s'ils se coupent en un seul point.

Propriété : Une droite (D) est dite tangente au cercle $\mathcal{C}$ (Ω, r) si et seulement si d $(\Omega, (D)) = r$

2.2 Equation de la tangente à un cercle en un de ses points.

Soit $\mathcal{C}$ (Ω, r) un cercle dans le plan où Ω (a, b) et A l'un de ses points.

Soit la droite (T) la tangente à $\mathcal{C}$ (Ω, r) en A

$$M(x;y)\in(T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-x_A)(y-y_A)+(a-x_A)(b-y_A)=0$$

Propriété : Soient Ω (a, b) un point et $\mathcal{C}$ (Ω, r) un cercle dans le plan et A l'un de ses points. La droite (T) tangente à $\mathcal{C}(\Omega,r)$ en A à pour équation :

$$(x-x_A)(y-y_A)+(a-x_A)(b-y_A)=0$$

exemple : Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation :

$x^2+y^2-4x-2y+1=0$ (1)

1)Vérifier que $A(0;1)\in(C)$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.

Solution :1)On a : $0^2+1^2-4\times0-2\times1+1=0$

Donc $A(0;1)\in(C)$

2)L'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A. ??

$a=2;b=1;c=1$: $a^2+b^2-c=2^2+1^2-1=4>0$

Donc $(\mathcal{C})$ cercle de centre $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ cad $\Omega(2;1)$

$\overrightarrow{A\Omega}(-2;0)$ et $\overrightarrow{AM}(x-0;y-1)$

$M(x;y)\in(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{A\Omega}=0$

$-2(x-0)=0 \Leftrightarrow -2(x-0)+0(y-1)=0 \Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

$M(x;y)\in(D) \Leftrightarrow x=0$

Donc : L'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A est :$(D): x=0$

Application : Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation :

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$

1)Vérifier que le point A (3, −1) appartient au cercle

2- Ecrire l'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.

2.3 Tangente à un cercle $(\mathcal{C})$ passante par un point à l'extérieure de $(\mathcal{C})$

Exercice :

Soient le cercle $(\mathcal{C})$: $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ et $A(5,6)$

1- Vérifier que le point A est à l'extérieur de $(\mathcal{C})$

2- a) Déterminer l'équation de la droite (δ) passante par A et parallèle à l'axe des ordonnées.

b) Vérifier que (δ) n'est pas tangente à $(\mathcal{C})$.

3- Soit (Δ) une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : (Δ) $y = mx + p$

a) Déterminer l'équation de (Δ) en fonction de m uniquement.

b) Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

4- Soit $B(4,5)$

a) Montrer que la droite passante par B et parallèle à l'axe des ordonnées est tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

b) Soit (Δ') une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : (Δ') $y = mx + p$; Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

2.3 Tangente à un cercle et de direction déterminée.

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(-1,2)$ et de rayon 3.
Déterminer les équations des tangentes à $(\mathcal{C})$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2;1)$.

3) Equation paramétrique d'un cercle.

le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

Considérons $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r. On a : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$ (1)

Si $M(x, y)$ dans $\mathcal{R}$ et $M(X, Y)$ dans $\mathcal{R}'$ où :

$\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ et $\mathcal{R}'(O;\vec{i};\vec{j})$

Alors (1) se traduit analytiquement par : $\begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$

or $\begin{cases} X = r\cos\alpha \\ Y = r\sin\alpha \end{cases}$ et par suite : $\begin{cases} x = a + r\cos\alpha \\ y = b + r\sin\alpha \end{cases}$

Réciproquement l'ensemble

$(C) = \left\{ M(x;y) \in (P) / \begin{cases} x = a + r\cos\alpha \\ y = b + r\sin\alpha \end{cases} \right\}$

où a et b sont des réels et r un réel positif est le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r

Exemple1 :Déterminer l'*équation paramétrique du cercle* (C) de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$

Solution :l'*équation paramétrique du cercle* (C) de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$ est :

$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}\cos\theta \\ y = -2 + \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ avec $(\theta \in \mathbb{R})$

Exemple2 : Déterminer l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan tel que :

$\begin{cases} x = 3 + \sqrt{3}\cos\theta \\ y = 1 + \sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$ avec $(\theta \in \mathbb{R})$

Solution : $\begin{cases} x - 3 = \sqrt{3}\cos\theta \\ y - 1 = \sqrt{3}\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{3}\cos\theta \\ y = 1 + \sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = \left(\sqrt{3}\cos\theta\right)^2 + \left(\sqrt{3}\sin\theta\right)^2 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 3\left((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right) \Leftrightarrow$

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{3}^2$

Donc l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan est *le cercle* (C) de centre $\Omega(3;1)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$

Exercice1 :le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. (C) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ avec $(\theta \in \mathbb{R})$

1) montrer que (C) est *le cercle* (C) dont on déterminera de centre Ω et de rayon R et une équation cartésienne

2)soit le point $A(-1;0)$; montrer que A est à l'extérieur du cercle (C) et déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A

3) déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ et qui sont parallèles à la droite :

(D) : $3x - 4y = 0$

4)a)soit la droite (Δ) d'équation : $y = x$

Montrer que (Δ) coupe le cercle (C) en deux points à déterminer

4)b) déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $\frac{x^2+y^2}{4} \le x \le y$

Solution :1) $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2\cos\theta \\ y - 0 = 2\sin\theta \end{cases}$

$(x-2)^2 + (y-0)^2 = (2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta)^2 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 4\left((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right) \Leftrightarrow$

$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$

Donc l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan est *le cercle* (C) de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $R = 2$

2) $A(-1;0)$; (C) : $(x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$

On a : $(-1-2)^2 + (0-0)^2 - 4 = 9 - 4 \succ 0$ donc A est à l'extérieur du cercle (C)

Soit (T) une droite qui passe par A et tangente au cercle $(\mathcal{C})$ et soit : $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de (T) avec $(a;b) \neq (0;0)$

Puisque (T) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ alors :

$d(\Omega,(T)) = R$ cad $\frac{|2a + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2$:

Et on a : $A \in (T)$ donc : $-a + c = 0$ donc on trouve :

$b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ ou $b = -\frac{a\sqrt{5}}{2}$ et l'équation cartésienne de (T) est : $2x - \sqrt{5}y + 2 = 0$ ou $2x + \sqrt{5}y + 2 = 0$

Par suite les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A sont :

(T_1) : $2x - \sqrt{5}y + 2 = 0$ ou (T_2) : $2x + \sqrt{5}y + 2 = 0$

3) (D) : $3x - 4y = 0$ $\Omega(2;0)$

Puisque $(T) \parallel (D)$ donc on pose :

(T) : $3x - 4y + c = 0$ et (T) tangentes au cercle $(\mathcal{C})$

Donc : $d(\Omega,(T)) = R \Leftrightarrow$ cad $\frac{|6 + c|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2$:

$\Leftrightarrow \frac{|6+c|}{5} = 2 \Leftrightarrow |6+c| = 10 \Leftrightarrow 6 + c = 10$ Ou $6 + c = -10$

$c=4$ ou $c=-16$

Donc les tangentes au cercle ($\mathcal{C}$) sont :

(T_1') : $3x-4y+4=0$ ou (T_2') : $3x-4y-16=0$

4)a) on va résoudre le système suivant :

$\begin{cases}(x-2)^2+(y-0)^2=2^2\\ y=x\end{cases}$ donc : $y=x$ et $2x^2-4x=0$

donc : ($x=0$ ou $x=2$) et $y=x$

donc : (Δ) coupe le cercle (C) aux points :

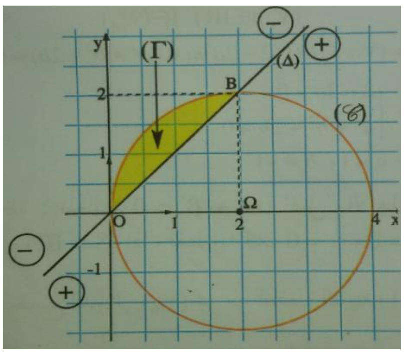
$O(0;0)$ et $B(2;2)$

4)b) $\frac{x^2+y^2}{4}\le x\le y \Leftrightarrow \begin{cases}x-y\le 0\\ x^2+y^2-4x\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y\le 0\\ (x-2)^2+y^2-4\le 0\end{cases}$

L'inéquation : $(x-2)^2+y^2-4\le 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve à l'intérieur du cercle (C) ou sur le cercle (C)

Et L'inéquation : $x-y\le 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve au-dessus de la droite (Δ) ou sur la droite (Δ)

Voire la figure ci-dessus :



Exercice2 : le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. Soient les points

$A(3;4)$ $B(4;1)$; $C(2;-3)$

1)montrer que les points A ; B et C sont non alignés

2)Ecrire l'équation du cercle (C) passant par A ; B et C

Solution : 1) on a : $\overrightarrow{AB}(1;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;-7)$

$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & -7\end{vmatrix}=-10\neq 0$

Donc les points A ; B et C sont non alignés

1)Soient $I\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$ et $J(3;-1)$ le milieu respectivement du segments : $[AB]$ et $[BC]$

Et soit (D) la médiatrice de $[AB]$ donc (D) passe par I et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur normal a (D)

$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)-3\left(y-\frac{5}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x-3y+4=0$

Donc : $(D): x-3y+4=0$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[BC]$ donc (Δ) passe par J et $\overrightarrow{BC}$ un vecteur normal a (Δ)

$M(x;y)\in(\Delta)\Leftrightarrow \overrightarrow{JM}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow x+2y-1=0$

Donc : $(\Delta): x+2y-1=0$ (après simplifications)

soit Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (D) on va donc résoudre le système :

$\begin{cases}x-3y+4=0\\ x+2y-1=0\end{cases}$

Et la solution de ce système est : $\Omega(-1;1)$ donc $\Omega(-1;1)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est : $r=A\Omega=\sqrt{(3+1)^2+(4-1)^2}=5$

Et l'équation du cercle est : $(x+1)^2+(y-1)^2=25$

$(C): x^2+y^2+2x-2y-23=0$

Exercice 3: le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. (C_m) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que :

$(C_m): x^2+y^2-2mx+2y+2m=0$ avec m Paramètre réel

1)déterminer l'ensemble (C_1)

2) a)montrer que $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$ (C_m) est *un cercle* dont déterminera le centre Ω_m et de rayon R_m

2) b) déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m\in\mathbb{R}-\{1\}$

2) b) montrer que tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe I dont déterminera et tracer $(C_0);(C_2);(C_3)$

3) a) montrer que la droite (Δ) : $x=1$ est tangente A toutes les *cercles* (C_m)

3) b)soit $m \succ \frac{-3}{2}$ et $m \neq 1$ et le point $A(0;1)$

Vérifier que A est à l'extérieur des *cercles* (C_m) et que la droite (AI) n'est pas tangente aux *cercles* (C_m)

solution :1) (C_1) ? pour $m=1$ on a :

$(C_1): x^2+y^2-2x+2y+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=0$

$\Leftrightarrow x-1=0 et y+1=0 \Leftrightarrow x=1$ et $y=1$

Donc : (C_1) est le point $E(1;-1)$

2) a) $(C_m): x^2+y^2-2mx+2y+2m=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-m)^2+(y+1)^2=(m-1)^2$

Donc : (C_m) est *un cercle* de centre $\Omega_m(m;-1)$ et de rayon $R_m=|m-1| \quad \forall m \in \mathbb{R}-\{1\}$

2) b)on pose : $x=m$ et $y=-1$ avec $m \in \mathbb{R}-\{1\}$

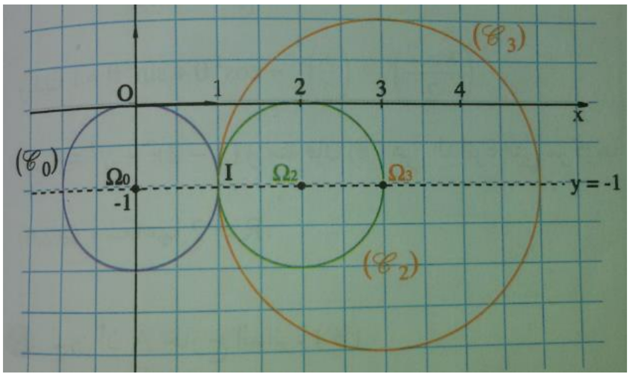
on a donc: l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m \in \mathbb{R}-\{1\}$ est la droite d'équation : $y=-1$ privé du Point $E(1;-1)$

2) b) $I(a;b) \in (C_m) \ \forall m \in \mathbb{R}-\{1\}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ma+2b+2m=0$

$\Leftrightarrow m(2-2a)+a^2+b^2+2b=0 \ \forall m \in \mathbb{R}-\{1\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-2a=0 \\ a^2+b^2+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1$ et $b=-1$ Donc : tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe $I(1;-1)$



3) a)L'équation de (Δ) est : $x+0y-1=0$

Et $d(\Omega_m,(\Delta))=\frac{|m-1|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|m-1|=R_m$

Donc : la droite (Δ) est tangente a toutes les *cercles* (C_m) (on peut montrer que (Δ) coupe en (C_m) un point unique)

3) b)on a : $x^2+y^2-2mx+2y+2m=2m+3$

Et puisque : $m \succ \frac{-3}{2}$ alors : $x^2+y^2-2mx+2y+2m \succ 0$

donc A est à l'extérieur des *cercles* (C_m)

Montrons que : $d(\Omega_m,(AI))=\frac{|2m-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}R_m$

Donc : (AI) n'est pas tangente aux *cercles* (C_m)

Car : $\frac{2}{\sqrt{5}}R_m \neq R_m$

Exercice 1 : Déterminer les ensembles :

$(\Gamma 1)=\{M(x,y) \in (\mathcal{P}) / x^2+y^2-2x+y+1=0\}$

$(\Gamma 2)=\{M(x,y) \in (\mathcal{P}) / x^2+y^2-x+2y+4=0\}$

Exercice1 :

Soient les points $A(-1{,}0)$, $B(1{,}2)$ et $C(5,-2)$

1- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés

2- Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC.

Exercice 2 : Soit l'ensemble :

$(C_m)=\{M(x,y) \in (\mathcal{P}) / x^2+y^2-2mx+4my+4m^2-1=0\}$

où m est un réel.

1- Montrer que pour tout m dans $\mathbb{R}$, l'ensemble (C_m) est un cercle et déterminer ses éléments.

2- Déterminer l'équation cartésienne du plus petit cercle (C_m).

3- Déterminer l'ensemble dans lequel varient les centres Ω_m quand m décrit $\mathbb{R}$

4- a) Déterminer pour quelles valeurs de m le point $A(-1{,}2)$ appartient-il à (C_m)

b) Soit $M_0(x_0;y_0)$) un point donné dans le plan, existent-ils toujours des réels m qui vérifient $M_0 \in (C_m)$

5- Déterminer s'il existe l'intersection de tous les cercles (C_m)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien