

**TD-PRODUIT SCALAIRE DANS  $\mathcal{V}_2$**   
**Etude analytique -Applications : cercle**  
**Exercices avec corrections**

**Exercice1** : dans Le plan ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère orthonormé                      Considérons les points

$A(1;-3)$  et  $B(3;7)$  et  $C(-3;1)$

- 1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C
- 2) Calculer la surface du triangle ABC

**Solution** : 1)

*Methode1* :  $\overrightarrow{BC}(-6;-6)$  et  $\overrightarrow{AC}(-4;4)$  et  $\overrightarrow{AB}(2;10)$

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2+10^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

$AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

Puisque :  $AC^2 + BC^2 = 32 + 72 = 104$  et  $AB^2 = 104$

Donc :  $AC^2 + BC^2 = AB^2$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

*Methode2* :  $\overrightarrow{BC}(-6;-6)$  et  $\overrightarrow{AC}(-4;4)$

Donc :  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 24 - 24 + 0$  Donc :  $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

2) puisque le triangle ABC est rectangle en C alors :

$S = \frac{1}{2} CA \times CB = \frac{1}{2} 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 24$

**Exercice2**: dans Le plan ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère orthonormé                      Considérons les points

$A(5;0)$  et  $B(2;1)$  et  $C(6;3)$

- 1) Calculer  $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  et  $\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$
- 2) en déduire une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

**Solution** : 1)  $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$  et

$\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$

et on a :  $\overrightarrow{AB}(-3;1)$  et  $\overrightarrow{AC}(1;3)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times 1 + 1 \times 3 = -3 + 3 = 0$

$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10$

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$  et  $AC = \sqrt{10}$

$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{0}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = 0$

$\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{-10}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = -1$

2) on a :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  et  $AB = AC$  donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{-\pi}{2} [2\pi]$  car :  $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}) = \frac{-\pi}{4} [2\pi]$  et

$\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -1$

Donc :  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}) [2\pi]$

$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}) = \frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{4} [2\pi] = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$

**Exercice3** : déterminer une équation cartésienne de la droite ( $D$ ) qui passe par  $A(0;1)$  et qui admet  $\vec{n}(2;1)$  comme vecteur normal

**Solution** : on a ( $D$ ) qui passe  $A(0;1)$  et  $\vec{n}(2;1)$  un vecteur normal donc : une équation cartésienne de la droite ( $D$ ) est :  $2(x-0) + 1(y-1) = 0$

donc : ( $D$ ) :  $2x + y - 1 = 0$

**Exercice4** : donner un vecteur normal a la droite ( $D$ ) dans les cas suivants : 1) ( $D$ ) :  $x - 2y + 5 = 0$

2) ( $D$ ) :  $2y - 3 = 0$                       3) ( $D$ ) :  $x - 1 = 0$

**Solution** : un vecteur normal a la droite ( $D$ ) d'équation cartésienne :  $ax + by + c = 0$

Est  $\vec{n}(a;b)$

1) ( $D$ ) :  $x - 2y + 5 = 0$  :  $\vec{n}(1;-2)$  un vecteur normal

2) ( $D$ ) :  $0x + 2y - 3 = 0$  :  $\vec{n}(0;2)$  un vecteur normal

2)  $(D): 1x+0y-1=0$  :  $\vec{n}(1;0)$  un vecteur normal

**Exercice5** : dans Le plan  $(\mathcal{P})$  est rapporté à un repère orthonormé      Considérons les points

$A(-3;0)$  et  $B(3;0)$  et  $C(1;5)$

1)déterminer une équation cartésienne de la droite  $(D)$  perpendiculaire à la droite  $(AB)$  passant par  $C$

2)déterminer une équation cartésienne de la droite  $(\Delta)$  parallèle à la droite  $(AB)$  passant par  $C$

**Solution** : 1)soit  $M$  un point du plan  $(\mathcal{P})$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overline{CM} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow 6(x-1) - (y-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - y - 1 = 0$$

Donc :  $(D): 6x - y - 1 = 0$

1)soit  $M(x; y)$  un point du plan  $(\mathcal{P})$

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overline{CM} \cdot \vec{n} = 0$$

Avec  $\vec{n}$  un vecteur normal a la droite  $(AB)$

Le vecteur :  $\overline{AB}(6, -1)$  est un vecteur directeur de la droite  $(AB)$  et on a :  $\vec{n}(1, 6)$

On a donc :  $M \in (\Delta) \Leftrightarrow (x-1) + 6(y-5) = 0$

$$\Leftrightarrow x + 6y - 31 = 0 \text{ Donc : } (\Delta): x + 6y - 31 = 0$$

**Exercice6** : dans Le plan  $(\mathcal{P})$  est rapporté à un repère orthonormé      Considérons les points  $A(1;2)$

et  $B(-2;3)$  et  $C(0;4)$

1)déterminer une équation cartésienne de la droite  $(D)$  médiatrice du segment  $[AB]$

2)déterminer une équation cartésienne de la droite  $(\Delta)$  la hauteur du triangle ABC passant par A

**Solution** : 1)  $(D)/ ax+by+c=0$

Avec  $\overline{AB}(a, b)$  un vecteur normal a  $(D)$

$$\overline{AB}(-3, 1) \text{ donc : } (D)/ -3x + y + c = 0$$

Or  $I \in (D)$   $I$  est le milieu du segment  $[AB]$

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right) \text{ donc } I\left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\text{Donc : } -3\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} + c = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -4$$

Par suite :  $(D)/ -3x+y-4=0$

2) $(\Delta)$  la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc :  $(\Delta)$  perpendiculaire a  $(BC)$  passant par A

Donc  $\overline{BC}(2, 1)$  un vecteur normal a  $(\Delta)$  donc

$(\Delta)/ 2x + y + c = 0$  et on a  $A \in (\Delta)$  donc

$$2 \times 1 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -4$$

$(\Delta)/ 2x + y - 4 = 0$

**Exercice7** :  $(D) 2x+3y-1=0$  et  $(D') \frac{3}{2}x - y + 4 = 0$

Etudier la position relative de  $(D)$  et  $(D')$

**Solution** :

$\vec{n}(2;3)$  est un vecteur normal de  $(D)$

$\vec{n}'\left(\frac{3}{2}; -1\right)$  est un vecteur normal de  $(D')$

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \times \frac{3}{2} + 3 \times (-1) = 3 - 3 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \vec{n}'$$

donc  $(D) \perp (D')$

**Exercice8** : Soient la droite  $(D)$  d'équation :

$$(D): 3x + 4y + 5 = 0$$

1)Déterminer les coordonnées du point  $H$  la projection orthogonale de  $O$  sur  $(D)$

2)calculer La distance du point  $O$  à la droite  $(D)$

3)Déterminer les coordonnées du point  $O'$  le symétrique de  $O$  par rapport à la droite  $(D)$

**Solution** : 1)puisque  $H$  est la projection orthogonale de  $O$  sur  $(D)$  alors  $H$  est le point d'intersection de la droite  $(D)$  et la droite  $(\Delta)$  qui passe par  $O$  et

perpendiculaire a  $(D)$  on va donc résoudre le système

$$\text{suivant : } \begin{cases} (D): 3x + 4y + 5 = 0 \\ (\Delta): 4x - 3y = 0 \end{cases} \text{ On trouve : } x = \frac{-3}{5} \text{ et}$$

$$y = \frac{-4}{5} \text{ donc } H\left(\frac{-3}{5}; \frac{-4}{5}\right)$$

*Autre méthode* : Soit  $H(x_H; y_H)$  on a

$$H \in (D) \Leftrightarrow 3x_H + 4y_H + 5 = 0$$

$\overline{OH}$  est normal a la droite  $(D)$  donc colinéaire avec

$$\vec{u}(3;4) \text{ Donc : } \exists k \in \mathbb{R} / \overline{OH} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 3k \\ y_H = 4k \end{cases}$$

Pour déterminer  $x_H$  et  $y_H$  on va donc résoudre le

$$\text{système suivant : } \begin{cases} (1) x_H = 3k \\ (2) y_H = 4k \\ (3) 3x_H + 4y_H + 5 = 0 \end{cases}$$

On remplace (1) et (2) dans (3) on trouve :

$$k = \frac{-1}{5} \text{ Donc : } \begin{cases} x_H = \frac{-3}{5} \\ y_H = \frac{-4}{5} \end{cases}$$

$$2) d(O; (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

3)  $O'$  le symétrique de  $O$  par rapport à la droite  $(D)$

Donc  $H$  est le milieu du segment  $[OO']$

Donc :  $\overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{O'H}$  on pose :  $O'(x; y)$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \frac{-3}{5} - x = \frac{3}{5} \\ \frac{-4}{5} - y = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{5} \\ y = -\frac{8}{5} \end{cases} \text{ Donc : } O' \left( -\frac{6}{5}; -\frac{8}{5} \right)$$

**Exercice9:** dans Le plan  $(\mathcal{P})$  est rapporté à un repère orthonormé et direct      Considérons les points

$A(1; -1)$  et  $B(4; -1)$  et  $C(-2; 2)$

1) Calculer :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  et  $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

2) en déduire une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

3) Calculer la surface du triangle ABC

4) déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A

5) déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

**Solution :** 1) on a :  $\overrightarrow{AB}(3; 0)$  et  $\overrightarrow{AC}(-3; 3)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-3) + 0 \times 3 = -9$$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

2) soit  $\alpha$  une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  on a :

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} \text{ et } \sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3 \text{ et } AC = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Donc : } \cos \alpha = \frac{-9}{9\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \alpha = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc : } \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$3) \text{ on a : } S = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| = \frac{9}{2} \text{ cm}^2$$

4) soit  $(\Delta)$  la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc :  $(\Delta)$  perpendiculaire à  $(BC)$  passant par A

Donc  $\overrightarrow{BC}(-6, 3)$  un vecteur normal à  $(\Delta)$  donc

$(\Delta) / -6x + 3y + c = 0$  et on a  $A(1; -1) \in (\Delta)$  donc

$$-6 \times 1 - 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 9$$

$(\Delta) / -6x + 3y + 9 = 0$  donc :  $(\Delta) / 2x - y - 3 = 0$

4) soit  $(D)$  la bissectrice de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Pour Chaque point  $M(x, y)$  de la droite  $(D)$

On a :  $d(M; (AB)) = d(M; (AC))$

$$\text{D'où } \frac{|y+1|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|x+y|}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|y+1| = |x+y|$$

On remarque que  $(D)$  se trouve dans le demi plan tel

$$\text{que : } \begin{cases} y+1 \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases} \text{ donc : } \sqrt{2}(y+1) = x+y$$

donc : l'équation cartésienne de  $(D)$  est :

$$\begin{cases} x + (1 - \sqrt{2})y - \sqrt{2} = 0 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases} \text{ (D) est un demi droite}$$

**Exercice10 :** déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre  $\Omega(-1; 2)$  et de rayon  $r = 3$

**Solution :** l'équation cartésienne du cercle est :

$$\mathcal{C}(\Omega, r): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

$$\text{C a d : } x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

**Exercice11 :** Déterminer L'ensemble  $(E)$  dans les cas suivants :

$$1) (E): x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$$

$$2) (E): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$$

$$3) (E): x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0$$

$$\text{Solutions : } 1) a = \frac{1}{2}; b = -\frac{3}{2}; c = -4$$

$$\text{On a : } a^2 + b^2 - c = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - (-4) = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 4 = \frac{13}{2} > 0$$

$$\text{Donc : } \Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right) \text{ donc } \Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{-3}{2}\right)$$

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - c}}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

alors (E) : est une cercle de centre

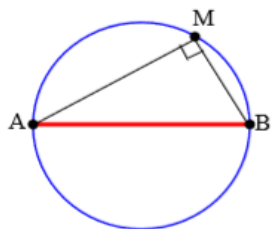
$$\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{-3}{2}\right) \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$2) a=3; b=-1; c=10 \quad a^2 + b^2 - c = 3^2 + (-1)^2 - 10 = 9 + 1 - 10 = 0$$

$$\text{alors } (E) = \{\Omega(3; -1)\}$$

$$3) a=2; b=0; c=5$$

**Exercice12** : Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB] avec A(1;2) et B(-3;1)



**solution :**

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

$$\overrightarrow{MA}(1-x; 2-y) \text{ et}$$

$$\overrightarrow{MB}(-3-x; 1-y)$$

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow (-3-x)(1-x) + (1-y)(2-y) = 0$$

$$\text{Donc : } (C) : x^2 + y^2 + 2x - 3y - 1 = 0$$

**Exercice13** : le plan (P) est

rapporté à un repère

orthonormé. Soient les points

$$A(2;3) \quad B(0;1); \quad C(-4;5);$$

$$E(5;2) \text{ et } F(2;4)$$

1) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC.

2) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle

OEF. **Solution :** 1) Soient I(1;2) et J(-1;4) le milieu respectivement du segments : [AB] et [AC]

Et soit (Δ) la médiatrice de [AB] donc (Δ) passe par

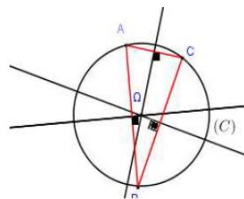
$$I(1;2) \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ un vecteur normal a } (\Delta)$$

$$\text{Et on a : } \overrightarrow{AB}(-2; -2) \text{ donc une équation de } (\Delta) \text{ est :}$$

$$(\Delta) : -2(x-1) - 2(y-2) = 0$$

$$\text{Donc : } (\Delta) : -2x + 2 - 2y + 4 = 0 \text{ donc } (\Delta) : -2x - 2y + 6 = 0$$

$$\text{donc } (\Delta) : x + y - 3 = 0 \text{ (après simplifications)}$$



Et soit (Δ') la médiatrice de [AC] donc (Δ') passe par

$$J(-1;4) \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ un vecteur normal a } (\Delta') \text{ et on a :}$$

$$\overrightarrow{AC}(-6; 2) \text{ donc une équation de } (\Delta') \text{ est :}$$

$$(\Delta') : -6(x+1) + 2(y-4) = 0 \text{ donc : } (\Delta') : 3x - y + 7 = 0$$

On a Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle

ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (Δ') on va

donc résoudre le système :

$$\begin{cases} (\Delta) : x + y - 3 = 0 \\ (\Delta') : 3x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

Et la solution de ce système est : (-1;4) donc

Ω(-1;4) est le centre du cercle circonscrit du triangle

$$ABC \text{ et le rayon est : } r = A\Omega = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}$$

Et l'équation du cercle est :  $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 10$

$$(C) : x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$$

2) déterminons l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF. On sait que l'équation du cercle s'écrit

sous la forme :  $(C') : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

$$\text{Et on a : } O \in (C') \Leftrightarrow c = 0$$

$$E(5;2) \in (C') \Leftrightarrow 25 + 4 - 10a - 4b = 0$$

$$F(2;4) \in (C') \Leftrightarrow 4 + 16 - 4a - 8b = 0$$

on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 10a + 4b = 29 \\ a + 2b = 5 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{19}{8} \\ b = \frac{21}{16} \\ c = 0 \end{cases}$$

Et l'équation du cercle est :

$$(C') : x^2 + y^2 - \frac{19}{4}x - \frac{21}{8}y = 0$$

**Exercice14** : résoudre graphiquement le système :

$$(S) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} < 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Solution : } x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} = 0$$

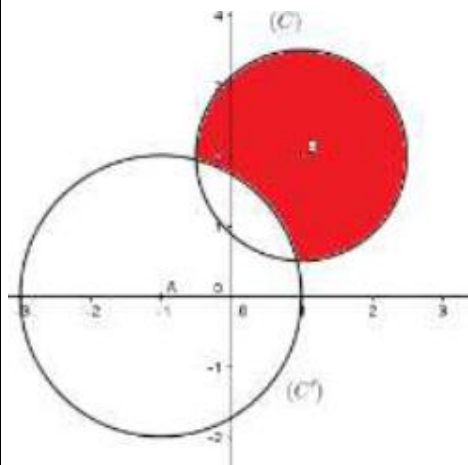
Est l'équation du cercle (C)

de centre B(1,2) et de rayon  $r = \frac{3}{2}$

$x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$  est l'équation du cercle (C')

de centre  $A(-1,0)$  et de rayon  $r' = 2$ .

L'ensemble des points  $M$  qui vérifient  $(S)$  est l'extérieur de  $(C')$  intersection l'intérieur de  $(C)$



**Exercice15** : résoudre graphiquement le système :

$$(S) \begin{cases} (1): x^2 + y^2 - 4x < 0 \\ (2): x - y - 1 > 0 \end{cases}$$

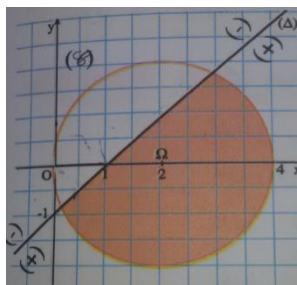
**solution** :  $(1): x^2 + y^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 < 2^2$

Donc les solutions de cette inéquation c'est les couples  $(x; y)$  des points qui se trouvent à l'intérieurs du cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(2;0)$  et de rayon  $r = 2$

•  $(2): x - y - 1 > 0$  : les solutions de cette inéquation c'est les couples  $(x; y)$  des points qui se trouvent au-dessous de la droite d'équation :  $(\Delta): x^2 + y^2 - 4x = 0$  (demi plan qui contient  $\Omega(2;0)$ )

$$\text{Car : } 2 - 0 - 1 = 1 > 0$$

Finalement l'ensemble des solutions du système c'est les couples  $(x; y)$  des points qui appartiennent à la partie colorée.



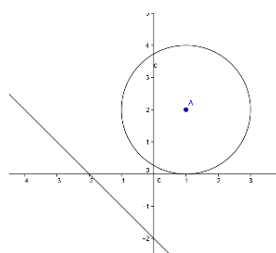
**Exercice16** : Etudier la position du cercle de centre  $\Omega(1;2)$  et de rayon  $R = 2$  avec la droite d'équation

$$(D): x + y + 2 = 0$$

**Solution** : on calcul  $d(\Omega, (P))$  ?

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > R = 2$$

Donc : droite  $(D)$  est à l'extérieur du cercle  $(C)$   
 $(C) \cap (D) = \emptyset$



**Exercice17** : Etudier la position du cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(1;2)$  et de rayon  $R = 2$  avec la droite d'équation  $(D): x - y + 2 = 0$

**Solution** on calcul  $d(\Omega, (P))$  ?

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < R = 2$$

Donc : le cercle  $(C)$  et la droite  $(D)$  se coupent en deux points  $A$  et  $B$ . Déterminons les coordonnées des points d'intersections ?

On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)(x-1)^2 + (y-2)^2 = (2)^2 \\ (2)x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } (2) \Leftrightarrow x + 2 = y$$

On remplaçant dans (1)  $y = x + 2$

$$\text{On trouve : } (1)(x-1)^2 + (x+2-2)^2 = (2)^2$$

$$\text{Donc : } (x-1)^2 + (x)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 = 4$$

$$\text{Donc : } 2x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Delta = 28$$

$$\text{Donc : } x_1 = \frac{2+2\sqrt{7}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{2-2\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{Donc : } x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Si : } x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \text{ on remplace dans } x + 2 = y$$

$$\text{On trouve : } y_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$$

Si :  $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$  on

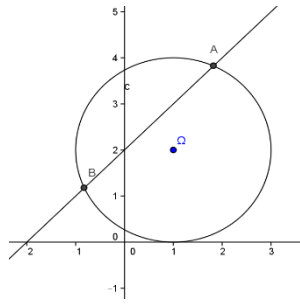
remplace dans  $x+2=y$

On trouve :

$$y_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

Donc : les points d'intersections sont :

$$A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}; \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right) \text{ et } B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}; \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$$



**Exercice18** :: Etudier la position du cercle (C) de centre  $\Omega(1;2)$  et de rayon  $R=1$  avec la droite d'équation (D) :  $y=3$

**Solution** on calcul  $d(\Omega, (P))$  ?

$$(D) : 0x+1y-3=0$$

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{1}} = 1 = R$$

Donc : la droite (D) est tangente au cercle (C) en A. Déterminons les coordonnées du point d'intersection ou point de tangence ?

L'équation de (C) est  $(x-1)^2+(y-2)^2=1^2$

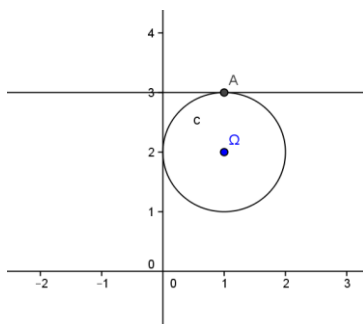
On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) (x-1)^2+(y-2)^2=1 \\ (2) y=3 \end{cases}$$

On remplaçant dans  $y=3$  dans (1)

On aura :

$$(1)(x-1)^2+1=1 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0$$



Donc :  $x=1$  donc point de tangence est  $A(1;3)$

**Exercice19** : Soit (C) le cercle d'équation :

$$x^2+y^2-4x-2y+1=0 \quad (1)$$

1) Vérifier que  $A(0;1) \in (C)$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle (C) en A.

**Solution** : 1) On a :  $0^2+1^2-4 \times 0-2 \times 1+1=0$

Donc  $A(0;1) \in (C)$

2) L'équation de la tangente au cercle (C) en A. ??

$$a=2; b=1; c=1 : a^2+b^2-c=2^2+1^2-1=4 > 0$$

Donc (C) cercle de centre  $\Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right)$  cad  $\Omega(2;1)$

$$\overline{A\Omega}(-2;0) \text{ et } \overline{AM}(x-0; y-1)$$

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{A\Omega} = 0$$

$$-2(x-0)=0 \Leftrightarrow -2(x-0)+0(y-1)=0 \Leftrightarrow M(x; y) \in (D)$$

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow x=0$$

Donc : L'équation de la tangente au cercle (C) en A est : (D) :  $x=0$

**Exercice20** : Déterminer l'équation paramétrique du cercle (C) de centre  $\Omega(1;-2)$  et de rayon  $r=\sqrt{2}$

**Solution** : l'équation paramétrique du cercle (C) de

centre  $\Omega(1;-2)$  et de rayon  $r=\sqrt{2}$  est :

$$\begin{cases} x=1+\sqrt{2} \cos \theta \\ y=-2+\sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

**Exercice21** : Déterminer l'ensemble (C) des points

$M(x; y)$  du plan tel que :

$$\begin{cases} x=3+\sqrt{3} \cos \theta \\ y=1+\sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

$$\text{Solution : } \begin{cases} x-3=\sqrt{3} \cos \theta \\ y-1=\sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+\sqrt{3} \cos \theta \\ y=1+\sqrt{3} \sin \theta \end{cases}$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=(\sqrt{3} \cos \theta)^2+(\sqrt{3} \sin \theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=3((\cos \theta)^2+(\sin \theta)^2) \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=3^2$$

Donc l'ensemble (C) des points  $M(x; y)$  du plan est le

cercle (C) de centre  $\Omega(3;1)$  et de rayon  $R=\sqrt{3}$

**Exercice22** : le plan (P) est rapporté à un repère

orthonormé. (C) l'ensemble des points

$$M(x; y) \text{ du plan tel que : } \begin{cases} x=2+2 \cos \theta \\ y=2 \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

1) montrer que (C) est le cercle (C) dont on déterminera de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  et une équation cartésienne

2) soit le point  $A(-1;0)$  ; montrer que  $A$  est à l'extérieur du cercle  $(C)$  et déterminer les équations des deux tangentes au cercle  $(C)$  passant par  $A$   
 3) déterminer les équations des deux tangentes au cercle  $(C)$  et qui sont parallèles à la droite :

$$(D) : 3x - 4y = 0$$

4a) soit la droite  $(\Delta)$  d'équation :  $y = x$

Montrer que  $(\Delta)$  coupe le cercle  $(C)$  en deux points à déterminer

4b) déterminer graphiquement l'ensemble des points

$$M(x; y) \text{ du plan tel que : } \frac{x^2 + y^2}{4} \leq x \leq y$$

**Solution :1)**  $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2\cos\theta \\ y - 0 = 2\sin\theta \end{cases}$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = (2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 4((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2) \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$$

Donc l'ensemble  $(C)$  des points  $M(x; y)$  du plan est le cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(2;0)$  et de rayon  $R = 2$

2)  $A(-1;0)$  ;  $(C) : (x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$

On a :  $(-1-2)^2 + (0-0)^2 - 4 = 9 - 4 > 0$  donc  $A$  est à l'extérieur du cercle  $(C)$

Soit  $(T)$  une droite qui passe par  $A$  et tangente au cercle  $(C)$  et soit :  $ax + by + c = 0$  une équation cartésienne de  $(T)$  avec  $(a;b) \neq (0;0)$

Puisque  $(T)$  est tangente au cercle  $(C)$  alors :

$$d(\Omega, (T)) = R \text{ cad } \frac{|2a + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 :$$

Et on a :  $A \in (T)$  donc :  $-a + c = 0$  donc on trouve :

$$b = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ ou } b = -\frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ et l'équation cartésienne de}$$

$$(T) \text{ est : } 2x - \sqrt{5}y + 2 = 0 \text{ ou } 2x + \sqrt{5}y + 2 = 0$$

Par suite les équations des deux tangentes au cercle  $(C)$  passant par  $A$  sont :

$$(T_1) : 2x - \sqrt{5}y + 2 = 0 \text{ ou } (T_2) : 2x + \sqrt{5}y + 2 = 0$$

3)  $(D) : 3x - 4y = 0$   $\Omega(2;0)$

Puisque  $(T) \parallel (D)$  donc on pose :

$$(T) : 3x - 4y + c = 0 \text{ et } (T) \text{ tangentes au cercle } (C)$$

$$\text{Donc : } d(\Omega, (T)) = R \Leftrightarrow \text{cad } \frac{|6 + c|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2 :$$

$$\Leftrightarrow \frac{|6 + c|}{5} = 2 \Leftrightarrow |6 + c| = 10 \Leftrightarrow 6 + c = 10 \text{ Ou } 6 + c = -10$$

$$c = 4 \text{ ou } c = -16$$

Donc les tangentes au cercle  $(C)$  sont :

$$(T_1') : 3x - 4y + 4 = 0 \text{ ou } (T_2') : 3x - 4y - 16 = 0$$

4a) on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2 \\ y = x \end{cases} \text{ donc : } y = x \text{ et } 2x^2 - 4x = 0$$

$$\text{donc : } (x=0 \text{ ou } x=2) \text{ et } y = x$$

donc :  $(\Delta)$  coupe le cercle  $(C)$  aux points :

$$O(0;0) \text{ et } B(2;2)$$

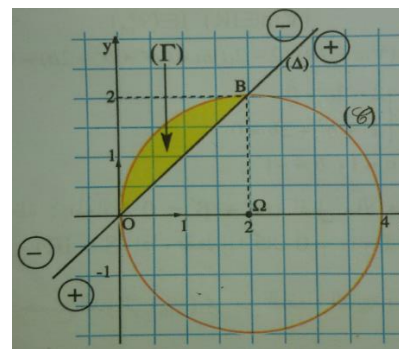
4b)  $\frac{x^2 + y^2}{4} \leq x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq 0 \\ (x-2)^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$

L'inéquation :  $(x-2)^2 + y^2 - 4 \leq 0$  détermine

l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan qui se trouve à l'intérieur du cercle  $(C)$  ou sur le cercle  $(C)$

Et L'inéquation :  $x - y \leq 0$  détermine l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan qui se trouve au-dessus de la droite  $(\Delta)$  ou sur la droite  $(\Delta)$

Voire la figure ci-dessus :



**Exercice23:** le plan  $(P)$  est rapporté à un repère orthonormé. Soient les points

$$A(3;4) \quad B(4;1); \quad C(2;-3)$$

1) montrer que les points  $A$  ;  $B$  et  $C$  sont non alignés

2) Ecrire l'équation du cercle  $(C)$  passant par  $A$  ;  $B$  et  $C$

**Solution ::** 1) on a :  $\overline{AB}(1;-3)$  et  $\overline{AC}(-1;-7)$

$$\det(\overline{AB}; \overline{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Donc les points  $A$  ;  $B$  et  $C$  sont non alignés

1) Soient  $I\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$  et  $J(3; -1)$  le milieu respectivement du segments :  $[AB]$  et  $[BC]$

Et soit  $(D)$  la médiatrice de  $[AB]$  donc  $(D)$  passe par  $I$  et  $\overline{AB}$  un vecteur normal a  $(D)$

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overline{IM} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right) - 3\left(y - \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3y + 4 = 0$$

Donc :  $(D): x - 3y + 4 = 0$

Et soit  $(\Delta)$  la médiatrice de  $[BC]$  donc  $(\Delta)$  passe par  $J$  et  $\overline{BC}$  un vecteur normal a  $(\Delta)$

$$M(x; y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overline{JM} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0$$

Donc :  $(\Delta): x + 2y - 1 = 0$  (après simplifications)

soit  $\Omega$  est le Centre du cercle circonscrit du triangle  $ABC$  donc le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(D)$  on va

donc résoudre le système :

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Et la solution de ce système est :  $\Omega(-1; 1)$  donc

$\Omega(-1; 1)$  est le centre du cercle circonscrit du triangle

$ABC$  et le rayon est :  $r = A\Omega = \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2} = 5$

Et l'équation du cercle est :  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$

$$(C): x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$$

**Exercice 24:** le plan  $(P)$  est rapporté à un repère

orthonormé.  $(C_m)$  l'ensemble des points

$M(x; y)$  du plan tel que :

$$(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0 \text{ avec } m \text{ Paramètre réel}$$

1) déterminer l'ensemble  $(C_1)$

2) a) montrer que  $\forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$   $(C_m)$  est un cercle dont déterminera le centre  $\Omega_m$  et de rayon  $R_m$

2) b) déterminer l'ensemble des centres  $\Omega_m$  lorsque  $m \in \mathbb{R} - \{1\}$

2) b) montrer que tous les cercles  $(C_m)$  passent par un point fixe  $I$  dont déterminera et tracer  $(C_0); (C_2); (C_3)$

3) a) montrer que la droite  $(\Delta) : x = 1$  est tangente

A toutes les cercles  $(C_m)$

3) b) soit  $m > \frac{-3}{2}$  et  $m \neq 1$  et le point  $A(0; 1)$

Vérifier que  $A$  est à l'extérieur des cercles  $(C_m)$  et que la droite  $(AI)$  n'est pas tangente aux cercles  $(C_m)$

**solution :** 1)  $(C_1)$  ? pour  $m=1$  on a :

$$(C_1): x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ et } y+1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ et } y=-1$$

Donc :  $(C_1)$  est le point  $E(1; -1)$

2) a)  $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 + (y+1)^2 = (m-1)^2$$

Donc :  $(C_m)$  est un cercle de centre  $\Omega_m(m; -1)$  et de rayon  $R_m = |m-1| \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$

2) b) on pose :  $x = m$  et  $y = -1$  avec  $m \in \mathbb{R} - \{1\}$

on a donc: l'ensemble des centres  $\Omega_m$  lorsque  $m \in \mathbb{R} - \{1\}$  est la droite d'équation :  $y = -1$  privé du

Point  $E(1; -1)$

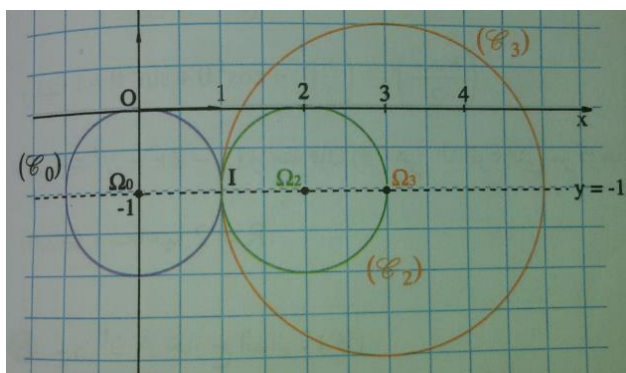
2) b)  $I(a; b) \in (C_m) \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ma + 2b + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(2-2a) + a^2 + b^2 + 2b = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-2a=0 \\ a^2 + b^2 + 2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1 \text{ et } b=-1 \text{ Donc : tous les}$$

cercles  $(C_m)$  passent par un point fixe  $I(1; -1)$



3) a) L'équation de  $(\Delta)$  est :  $x + 0y - 1 = 0$

$$\text{Et } d(\Omega_m, (\Delta)) = \frac{|m-1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |m-1| = R_m$$

Donc : la droite  $(\Delta)$  est tangente a toutes les



cercles  $(C_m)$  (on peut montrer que  $(\Delta)$  coupe en

$(C_m)$  un point unique)

$$3) \text{ b) on a : } x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 2m + 3$$

Et puisque :  $m > \frac{-3}{2}$  alors :  $x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m > 0$

donc  $A$  est à l'extérieur des cercles  $(C_m)$

$$\text{Montrons que : } d(\Omega_m, (AI)) = \frac{|2m-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} R_m$$

Donc :  $(AI)$  n'est pas tangente aux cercles  $(C_m)$

$$\text{Car : } \frac{2}{\sqrt{5}} R_m \neq R_m$$