

Ensembles Applications : Exercices

Exercice 1

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E . Montrer :

- 1) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.
- 2) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.
- 3) $\begin{cases} A \cap B \subset A \cap C \\ A \cup B \subset A \cup C \end{cases} \implies B \subset C$.
- 4) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
- 5) $(A - C) - (B - C) = (A - B) - C = A - (B \cup C)$
- 6) $A \triangle \bar{B} = A \triangle B$

Exercice 2

Dans \mathbb{C} on définit la relation \mathfrak{R} par : $z \mathfrak{R} z' \iff |z| = |z'|$

- 1) Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.
- 2) Déterminer la classe d'équivalence de chaque z de \mathbb{C} .

Exercice 3

On définit sur \mathbb{R} la relation \mathfrak{R} par : $x \mathfrak{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y$.

- 1) Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.
- 2) Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de \mathbb{R} . Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe ?

Exercice 4

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. On définit sur $P(E) - \emptyset$ la relation \triangleleft par : $X \triangleleft Y \iff (X = Y \text{ ou } \forall x \in X, \forall y \in Y, x \leq y)$.

Vérifier que \triangleleft est une relation d'ordre.

Exercice 5

Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications ; on considère l'application $h : E \longrightarrow F \times G$ définie par : $\forall x \in E : h(x) = (f(x), g(x))$.

- 1) Montrer que si f et g sont injectives, alors h l'est aussi.
- 2) On suppose que f et g sont surjectives, h est-elle nécessairement surjective ?

Exercice 6

Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que : $f = f \circ f \circ f$.

Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 7

Soient E un ensemble et $p : E \longrightarrow E$ une application telle que : $p = p \circ p$.

Montrer que si p est injective ou surjective, alors $p = Id_E$.

Exercice 8

Soient E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications telles que : $g \circ f \circ g \circ f$ est surjective et $f \circ g \circ f \circ g$ est injective.

Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 9

Soit X un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de X sur l'ensemble de ses parties $P(X)$.

- On pourra raisonner par l'absurde et considérer pour $f : X \longrightarrow P(X)$ l'ensemble $A = \{x \in X / x \notin f(x)\}$

Exercice 10

Soient X, Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

- 1) Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $g : Z \longrightarrow X$ et tout $h : Z \longrightarrow X$, on a $f \circ g = f \circ h \implies g = h$.
- 2) Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $g : Y \longrightarrow Z$ et tout $h : Y \longrightarrow Z$, on a $g \circ f = h \circ f \implies g = h$.