



## Correction

### Exercice 1

1)  $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap \bar{C}) \cap (B \cap \bar{C}) = (A \cap B) \cap \bar{C} = (A \cap B) - C$ .

2) Comme 1)

3)  $B = (A \cup B) \cap B \subset (A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B) \subset (A \cap C) \cup (C \cap B) = (A \cup B) \cap C \subset C$

4)  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (B \cup (A \cap C)) \cap (C \cup A) = (B \cap (C \cup A)) \cup (A \cap C) = (B \cap C) \cup (B \cap A) \cup (A \cap C)$

5)  $(A - C) - (B - C) = (A \cap \bar{C}) \cap \overline{(B \cap \bar{C})} = (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C) = (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C} \cap C) = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = (A - B) - C$

Et :  $(A - B) - C = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A - (B \cup C)$

6)  $\bar{A} \Delta \bar{B} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{B} \cap \bar{A}) = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{B} \cap A) = A \Delta B$

### Exercice 2

1) Soient  $z, z', z''$  des complexes quelconques.

• Reflexivité :  $z \mathfrak{R} z$  car  $|z| = |z|$ .

• Symétrie :  $z \mathfrak{R} z' = z' \mathfrak{R} z$  car  $|z| = |z'|$  et donc  $|z'| = |z|$ .

• Transitivité :  $z \mathfrak{R} z'$  et  $z' \mathfrak{R} z''$  alors  $|z| = |z'| = |z''|$  donc  $z \mathfrak{R} z''$ .

Donc  $\mathfrak{R}$  est une relation d'équivalence.

2) La classe d'équivalence d'un point  $z \in \mathbb{C}$  est l'ensemble des complexes qui sont en relation avec  $z$ , c'est-à-dire l'ensemble des complexes dont le module est égal à  $|z|$ . Géométriquement la classe d'équivalence de  $z$  est le cercle  $\mathfrak{C}$  de centre 0 et de rayon  $|z|$  :  $\mathfrak{C} = \{z|e^{i\theta}/\theta \in \mathbb{R}\}$

### Exercice 3

1) Evident, il suffit de remarquer que  $x \mathfrak{R} y \iff x^2 - x = y^2 - y$

2) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On cherche les éléments  $y$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $x \mathfrak{R} y$ . On doit donc résoudre l'équation  $x^2 - y^2 = x - y$ . Elle se factorise en  $(x - y)(x + y) - (x - y) = 0 \iff (x - y)(x + y - 1) = 0$ .

La classe de  $x$  est donc égale à  $x, 1 - x$ . Elle est constituée de deux éléments, sauf si  $x = 1 - x \iff x = \frac{1}{2}$ . Dans ce cas, elle est égale à  $\frac{1}{2}$ .

### Exercice 4

• Reflexivité : pour tout  $X \in P(E)$  on a :  $X \triangleleft X$  car  $X = X$ .

• Antisymétrie : pour  $X, Y \in P(E)$  tels que  $X \triangleleft Y$  et  $Y \triangleleft X$ , alors par définition de  $\triangleleft$  on a :  $\forall x \in X \forall y \in Y : x \leq y$  et  $y \leq x$ .

Comme la relation  $\leq$  est une relation d'ordre alors :  $x \leq y$  et  $y \leq x \implies x = y$ .

Donc  $\forall x \in X \forall y \in Y : x = y$ ; ce qui implique que  $X = Y$  (dans ce cas en fait  $X$  est vide ou un singleton).

• Transitivité : soit  $X, Y, Z \in P(E)$  tels que  $X \triangleleft Y$  et  $Y \triangleleft Z$ . Si  $X = Y$  ou  $Y = Z$ , alors il est clair que  $X \triangleleft Z$ .

Supposons que  $X$  et  $Y \neq Z$  alors :

$$\forall x \in X \forall y \in Y \forall z \in Z \quad x \leq y \text{ et } y \leq z.$$

alors par transitivité de la relation  $\leq$  on obtient :  $\forall x \in X \forall z \in Z : x \leq z$

Donc  $X \triangleleft Z$ .

Conclusion :  $\triangleleft$  est une relation d'ordre.

### Exercice 5

1) Soient  $x, y \in E$ .

$$h(x) = h(y) \iff \begin{cases} f(x) = f(y) \\ g(x) = g(y) \end{cases} \implies x = y \text{ dès que } f \text{ ou } g \text{ est injective.}$$

2) Contre exemple : Soit  $E$  un ensemble contenant 2 éléments  $a$  et  $b$  :  $E = \{a, b\}$  et considérant  $F = G = E$  et  $f = g = Id_E$  surjectives (évident).

$$\text{On aura alors } \forall x \in E : h(x) = (Id_E(x), Id_E(x)) = (x, x).$$

On a :  $(a, b) \in E \times E$  , mais il n'existe pas d'élément  $x$  de  $E$  qui vérifie :  $h(x) = (a, b)$   
 Donc  $h$  n'est pas nécessairement surjective.

**Exercice 6**

Si  $f$  est injective :

comme  $\forall x \in E : f(f \circ f)(x) = f(x)$  ;  $f \circ f = Id_E$  , donc  $f$  est bijective.

Si  $f$  est surjective : pour tout  $x \in E$  , il existe  $y \in E$  tel que  $x = f(y)$  et  $f \circ f(x) = f \circ f \circ f(y) = f(y) = x$  .

Donc  $f \circ f = Id_E$  ; donc  $f$  est bijective.

**Exercice 7**

Si  $p$  est injective. Comme  $\forall x \in E , p(p(x)) = p(x)$ . On déduit que  $p = Id_E$  .

Si  $p$  est surjective, pour tout  $x \in E$  , il existe  $y \in E$  tel que  $x = p(y)$  et  $p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$  , d'où  $p = Id_E$

**Exercice 8**

On a  $g \circ (f \circ g \circ f)$  est surjective et  $(f \circ g \circ f) \circ g$  est injective, donc  $g$  est bijective.

d'autre part :  $f \circ g \circ f = g^{-1} \circ (g \circ f \circ g \circ f) = (f \circ g \circ f \circ g) \circ g^{-1}$  est donc surjective et injective, donc bijective.

En conclusion,  $f \circ g \circ f$  est bijective et  $g$  bijective, donc  $f$  est bijective.

**Exercice 9**

Utilisons l'indication, Si  $f$  était surjective, nous pourrions trouver  $a \in X$  tel que  $A = f(a)$ .

Supposons d'abord  $a \in A$  ; on obtient  $a \in f(a)$  et par conséquent  $a \notin A$ , ce qui contredit notre hypothèse.

Supposons maintenant que  $a \notin A$  ; on obtient  $a \notin f(a)$  et par conséquent  $a \in A$  , ce qui contredit notre hypothèse.

Par conséquent, l'élément  $a$  n'appartient ni à  $A$ , ni à son complémentaire, ce qui est impossible.

Par suite,  $A$  ne possède pas d'antécédent par  $f$ , qui est donc non surjective.

- Remarque : Ce sujet entre dans le cadre du "paradoxe de Russell" (Paradoxe du menteur).

**Exercice 10**

1)

- Supposons d'abord  $f$  injective et soient  $g : Z \rightarrow X$  et  $h : Z \rightarrow X$  telles que  $f \circ g = g \circ h$ .

Alors, pour tout  $z$  de  $Z$ , on a  $f(g(z)) = f(h(z)) \implies g(z) = h(z)$  puisque  $f$  est injective.

On a donc bien  $g = h$  .

- Pour montrer l'implication réciproque, on procède par contraposée en supposant que  $f$  n'est pas injective.

Soit  $x \neq y$  tel que  $f(x) = f(y)$ . Posons  $Z = \{0\}$  ,  $g(0) = x$  et  $h(0) = y$ .

Alors on a  $f \circ g(0) = f \circ h(0) (= f(x) = f(y))$  ; alors que  $g \neq h$  .

2)

- Supposons d'abord  $f$  surjective et soient  $g : Y \rightarrow Z$  et  $h : Y \rightarrow Z$  telles que  $g \circ f = h \circ f$ .

Soit  $y \in Y$  . Il existe  $x$  de  $X$  tel que  $y = f(x)$ . On en déduit  $g(y) = g \circ f(x) = h \circ f(x) = h(y)$ , ce qui prouve  $g = h$ .

- Pour montrer l'implication réciproque, on procède par contraposée en supposant que  $f$  n'est pas surjective.

Il existe donc un point  $y_0$  de  $Y$  qui n'est pas dans  $f(X)$ .

On considère alors  $Z = \{0, 1\}$  ,  $g$  défini sur  $Y$  par  $g(y_0) = 1$  et  $g(y) = 0$  sinon,  $h$  défini sur  $Y$  par  $h(y) = 0$  pour tout  $y$ .

Alors on a bien  $g \circ f = h \circ f$  (car  $f(x) \neq y_0$  pour tout  $x$  de  $X$ ) et  $h \neq g$ .