

## Dénombrement

---

### Exercice 1

Pour  $A, B$  deux ensembles de  $E$  on note  $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Pour  $E$  un ensemble fini, montrer :

$$\text{Card } A\Delta B = \text{Card } A + \text{Card } B - 2\text{Card } A \cap B.$$

### Exercice 2

En utilisant la fonction  $x \mapsto (1+x)^n$ , calculer :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k ; \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k ; \quad \sum_{k=1}^n k C_n^k ; \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k.$$

### Exercice 3

En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

1.  $2^n + 1$  est divisible par 3 si et seulement si  $n$  est impair ;
2.  $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$  est divisible par 7.

### Exercice 4 \*\*I

On part du point de coordonnées  $(0,0)$  pour rejoindre le point de coordonnées  $(p,q)$  ( $p$  et  $q$  entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

### Exercice 5

On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?
3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?

### Exercice 6 Permutations

Combien y a-t-il de bijections  $f$  de  $\{1, \dots, 12\}$  dans lui-même possédant :

1. la propriété :  $n$  est pair  $\Rightarrow f(n)$  est pair ?
2. la propriété :  $n$  est divisible par 3  $\Rightarrow f(n)$  est divisible par 3 ?
3. ces deux propriétés à la fois ?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant *bijection* par *application*.

**Exercice 7**

---

Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments, et  $A \subset E$  un sous-ensemble à  $p$  éléments. Quel est le nombre de parties de  $E$  qui contiennent un et un seul élément de  $A$  ?