

Exercice 1

1) dans chacun des cas suivants

déterminer x :

a) $12 \equiv x \pmod{11}$

b) $x \equiv 111 \pmod{23}$ et $-23 < x < 0$

c) $x \equiv 215 \pmod{13}$ et $0 \leq x < 13$

2) soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Déterminer n dans chaque cas ci-dessous

a) $13 \equiv 5 \pmod{n}$ b) $125 \equiv -11 \pmod{n}$

c) $87 \equiv 74 \pmod{n}$

Exercice 2

soit p un nombre premier et $p \geq 3$

1) montrer que $p \equiv 1 \pmod{4}$ ou $p \equiv 3 \pmod{4}$

2) déduire que $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$

Exercice 3

Soit p un nombre premier supérieur à 5

1) montrer que $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$

2) montrer que $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$

3) a et b deux entiers tels que $3a = 8b$

a) montrer que $3/b$ et déduire que $8/a$

b) en déduire que $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$

Exercice 4

on pose $B_n = 3 \times 4^n + 2 \times 4^{n+1} + 4^{n+2}$ pour tout

entier naturel n

1) a) étudier la parité de B_n

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) 3|B_n$

c) en déduire que B_n est divisible par 6

2) déterminer $B_n \wedge B_{n+1}$

Exercice 5

1) montrer que $n^2 - n + 4$ et $n^2 + n + 4$ sont pairs

2) déduire que $n^4 \equiv n^2 \pmod{4}$

Exercice 6

On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation

$$(E): (x+1)^2 = 9+5y$$

1) soit (x, y) une solution de (E) .

Montrer que $x \equiv 1 \pmod{5}$ ou $x \equiv 2 \pmod{5}$

2) déterminer les solutions de (E)

Exercice 7

1) a) déterminer suivant n le reste de la division de 2^n par 3

b) en déduire que le reste de la division de 275423^n et $275423^n + 372121^n$ par 3

2) vérifier que $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ en déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) 13/3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$$

Exercice 8

a) étudier suivant n le reste de la division de 5^n par 13

b) déterminer le reste de la division de 2020^{2014} par 13

c) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) 13/31^{4n+1} + 18^{4n-1}$$

Exercice 9

a) déterminer suivant n le reste de la division de 3^n par 8

b) montrer que $8/3^{2n} - 1$ et $8/3^{2n+2} + 7$ et $8/3^{2n+4} - 1$

c) on pose $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$

déterminer

le reste de la division de A_p par 8

(étudier suivant la parité du nombre p)

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes :

1) $\bar{3}\bar{x} = \bar{1}$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

2) $\bar{5}\bar{x} = \bar{2}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

3) $\bar{6}\bar{x}^2 + \bar{4} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

4) $\bar{5}\bar{x}^2 + \bar{x} - \bar{4} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

Exercice 11

1) vérifier que

$$10^3 - 1 = 9 \times 111 \quad \text{et} \quad 10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$$

2) on pose $A_n = 10^{9n} + 2 \times 10^{6n} + 2 \times 10^{3n} + 1$

a) déterminer le reste de la division de A_n par 111

b) montrer que si n est impair alors A_n est divisible par les nombres 7, 11 et 13

c) on suppose n est pair

(i) montrer que $A_n - 6$ est divisible par

7, 11 et 13

(ii) déterminer le reste de la division de A_n par 111×1001

Exercice 12

1) soit n un entier naturel non nul

a) montrer que :

si n est impair alors $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$

b) montrer que si n est pair alors

$$n^2 \equiv 0 \pmod{8} \quad \text{ou} \quad n^2 \equiv 4 \pmod{8}$$

2) soient c ; b ; a trois entiers impairs

a) montrer que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est un carré parfait

b) montrer que $2(ab + bc + ca) \equiv 6 \pmod{8}$

c) en déduire que $2(ab + bc + ca)$ n'est pas un carré parfait

d) montrer que $ab + bc + ca$ n'est pas un carré parfait

Exercice 13

1) a et b deux entiers naturels non nuls tels que $(a+b) \wedge ab = p^2$ et p un nombre premier

a) montrer que p^2/a^2

déduire que p/a et p/b

b) montrer que $a \wedge b = p$ ou $a \wedge b = p^2$

2) on considère dans \mathbb{N}^2 le système

$$(S) \begin{cases} (a+b) \wedge ab = 49 \\ a \vee b = 231 \end{cases}$$

a) montrer que $a \wedge b = 7$

b) déterminer les solutions de (S)