Exercices avec solutions

Exercice01 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156

12)Déterminer dans $\mathbb{Z}$ tous les diviseurs de -8

Solution01 :1) 156 a 12 diviseurs :

1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78 et 156.

156 et 1 sont appelés diviseurs triviaux, les autres sont des diviseurs stricts.

2) D_{-8} = {−8, −4, −2, −1, 1,2,4,8}

Exercice02 :

1) $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ et $c\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}$

a) montrer que si $a/2b+c$ et $a/b+c$ alors a/c

b) montrer que si $a/2b+3c$ et $a/b+c$ alors a/c

c) montrer que si $a/x-y$ et $a/b-c$ alors $a/xb-cy$

2) $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

Montrer que $a/19$

3) $d\in\mathbb{Z}$ et $a\in\mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$

Montrer que $d/13$

Solution02 : 1) a)

$$\begin{cases} a/2b+c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2(b+c)-(2b+c) \Rightarrow a/c$$

1) b) $$\begin{cases} a/2b+3c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2b+3c-2(b+c) \Rightarrow a/c$$

1) c) $$\begin{cases} a/x-y \\ a/b-c \end{cases} \Rightarrow a/bx-by \;et\; a/by-cy \Rightarrow a/bx-cy$$

2) $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

$\Rightarrow a/12n+1 \;et\; a/-12n+18 \Rightarrow a/19$

$\Rightarrow a\in\{\pm1;\pm19\}$

3) $d\in\mathbb{Z}$ et $a\in\mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$

$\Rightarrow d/n^2+3 \;et\; a/(2n-1)^2 \Rightarrow d/4n^2+12 \;et\; d/4n^2-4n+1$

$\Rightarrow d/11+4n \;et\; d/-2+4n \Rightarrow d/13$

Exercice03 : $a\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{Z}$

Montrer que : $\begin{cases} a/5x-7 \\ a/2x+3 \end{cases} \Rightarrow a/29$

Solution03 : $\begin{cases} a/5x-7 \\ a/2x+3 \end{cases} \Rightarrow a/2(5x-7)-5(2x+3)$

$a/10x-14-10x-15 \Rightarrow a/-29 \Rightarrow a/29$

Exercice04 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$:

3 divise 4^n-1

Solution04 :

Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists k\in\mathbb{N} / 4^n-1=3k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons

$4^0-1=0$ est un multiple de 3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N} / 4^n-1=3k$ donc

$4^n=3k+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :

$\exists k'\in\mathbb{N} / 4^{n+1}-1=3k'$??

$4^{n+1}-1=4\times4^n-1$

$=4\times(3k+1)-1=12k+4-1=12k+3=3(4k+1)$

avec $k'=4k+1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N}; 4^n-1$ est divisible par 9

Exercice05 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$

Solution05 : $n+2/3n+1$ et $n+2/n+2$

$n+2/3n+1$et $n+2/3n+6$donc

$n+2/(3n+6)-(3n+1)$ donc$n+2/5$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5

Il faut que $n+2\in\{-1;-5;1;5\}$ ce qui entraine que

$n\in\{-3;-7;-1;3\}$

On vérifie que que que si $n\in\{-3;-7;-1;3\}$ alors $n+2/3n+1$ avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$ sont : -7 ; -3 ;-1 ;3

Exercice 06 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

Solution06 : Cette fraction a un sens si : $n+4\neq 0$, soit $n\neq -4$

On constate que $3n+8=3(n+4)-4$

$n+4$ divise $3(n+4)$, donc $n+4$ divise $3n+8$ si $n+4$ divise -4.

Les diviseurs de -4 sont 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4.

Il faut que $n+4\in\{-4;-2;-1;1;2;4\}$ ce qui entraine que $n\in\{-8;-6;-5;-3;-2;0\}$

On vérifie que -4 n'appartient pas à -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0 avant de conclure.

Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : -8 ; -6 ;-5 ; -3 ; -2 ; 0.

Exercice07 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes :a) $x^2-y^2=32$ avec $x\succ y$

b) $2xy+2x+y=99$

Solution07 :a) $x^2-y^2=32\Leftrightarrow(x-y)(x+y)=32$

$x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs positif de 32

Et $(x-y)+(x+y)=2x$ est u nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité $32=2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$S=\{(6;2);(9;7)\}$

b) $2xy+2x+y=99\Leftrightarrow 2xy+y+2x+1-1=99$

$\Leftrightarrow y(2x+1)+2x+1=99+1\Leftrightarrow(2x+1)(y+1)=100$

Donc : $2x+1$ et $y+1$ sont des diviseurs positif de 100

$D_{100}=\{1;2;4;5;10;20;25;50;100\}$

$2x+1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y+1$	100	50	25	20	5	4	2	1
x	0			2		12		
y	99			10		3		

$S=\{(0;99);(2;19);(12;3)\}$

Exercice08 : Déterminer les restes dans la division par 9 des nombres suivants : 23451^{100} ; 100^{23451}; $23451^{100}+100^{23451}$

Solution08 : On a : $23451=3908\times 9+6$

donc : $23451\equiv 6[9]$

donc : $23451\equiv 6^{100}[9]$

et on a : $6=6[9]$ donc $6^2=36[9]\Leftrightarrow 6^2=0[9]$

donc : $\left(6^2\right)^{50}=0[9]$ donc : $6^{100}=0[9]$

donc : $23451^{100}=0[9]$ **(1)**

donc le reste dans la division du nombre 23451^{100} par 9 est : 0 (cad 23451^{100} est divisible par 9 ou on dit que 9 divise 23451^{100})

de même on a : $100=11\times 9+1$ donc : $100\equiv 1[9]$

$\Rightarrow 100^{23451}=1^{23451}[9]\Rightarrow 100^{23451}=1[9]$ **(2)**

De **(1) et (2)** on déduit que :

$23451^{100}+100^{23451}=0+1[9]$car la congruence est compatible avec l'addition

Donc : $23451^{100}+100^{23451}=1[9]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $23451^{100}+100^{23451}$ par 9 est : 1

Exercice09 : 1) Montrer que : $5^8\equiv -1[17]$

2)Déterminer les restes dans la division par 17 des nombres suivants : 5^{16} ; 5^{500}.

Solution09 : 1)On a : $5^1\equiv 5[17]$donc

$5^2\equiv 25[17]\Leftrightarrow 5^2\equiv 8[17]$

$5^4\equiv 8^2[17]\Leftrightarrow 5^4\equiv 13[17]$

$5^8\equiv 13^2[17]\Leftrightarrow 5^8\equiv 169[17]\Leftrightarrow 5^8\equiv 16[17]\Leftrightarrow 5^8\equiv -1[17]$

2))On a : $5^8\equiv -1[17]$ donc

$\left(5^8\right)^2\equiv(-1)^2[17]\Leftrightarrow 5^{16}\equiv 1[17]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 5^{16} par 17 est : 1

On a : $500=31\times 16+4$

Donc : $5^{500}\equiv 5^{31\times 16+4}[17]\Leftrightarrow 5^{500}\equiv\left(5^{16}\right)^{31}\times 5^4[17]$

$\Leftrightarrow 5^{500}\equiv 1^{31}\times 5^4[17]\Leftrightarrow 5^{500}\equiv 5^4[17]\Leftrightarrow 5^{500}\equiv 13[17]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 5^{500} par 17 est : 13

Exercice10 : $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de a par 19

Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de b par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

1) $a+b$ 2) a^2+b^2 3) $2a-5b$

Solution10 : 1)On a : $a\equiv 17[19]$ et $b\equiv 15[19]$

donc : $a+b\equiv 17+15[19]\Leftrightarrow a+b\equiv 13[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a+b$ Par 19 est : 13

2) $a\equiv 17[19]\Rightarrow a^2\equiv 17^2[19]\Rightarrow a^2\equiv 4[19]$

$b\equiv 15[19]\Rightarrow b^2\equiv 15^2[19]\Rightarrow b^2\equiv 16[19]$

Donc : $a^2+b^2\equiv 4+16[19]\Leftrightarrow a^2+b^2\equiv 1[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre a^2+b^2 Par 19 est : 1

3) $a\equiv 17[19]\Rightarrow 2a\equiv 2\times 17[19]\Rightarrow 2a\equiv 15[19]$ **(1)**

$b\equiv 15[19]\Rightarrow 5b\equiv 5\times 15[19]\Rightarrow 5b\equiv 18[19]$

Donc : $5b\equiv -1[19]\Rightarrow -5b\equiv 1[19]$ **(2)**

De **(1) et (2)** on déduit que :

$2a-5b\equiv 15+1[19]\Rightarrow 2a-5b\equiv 16[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $2a-5b$ Par 19 est : 16

Exercice11 : Déterminer le reste de la division du nombres 3^{2007} par 2 et par 13

Solution11 :1)On a : $3\equiv 1[2]$ donc $3^{2007}\equiv 1[2]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 3^{2007} Par 2 est : 1

2)On a : $3\equiv 3[13]$ donc

$3^2\equiv 9[13]\Rightarrow 3^3\equiv 27[13]\Rightarrow 3^3\equiv 1[13]$

Et on a : $2007=3\times 669$ donc :

$\left(3^3\right)^{669}\equiv 1^{669}[13]\Rightarrow 3^{2007}\equiv 1[13]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 3^{2007} Par 13 est : 1

Exercice12 : Déterminer le reste de la division du nombres 73^{2019} par 7

Solution12 : On a : $73\equiv 3[7]$ donc $73^{2019}\equiv 3^{2019}[7]$

$3^{2019}=3^{2018+1}=3^{2\times 1009+1}=\left(3^2\right)^{1009}\times 3^1$

On a : $3^2\equiv 2[7]$ donc : $\left(3^2\right)^{1009}\equiv 2^{1009}[7]$

donc : $3^{2019}\equiv 2^{1009}\times 3[7]$

on a : $1009=336\times 3+1$

donc : $2^{2019}=\left(2^3\right)^{336}\times 2$ et on a : $2^3\equiv 1[7]$

donc : $\left(2^3\right)^{336}\times 2\equiv 2[7]$ par suite : $73^{2019}\equiv 6[7]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 73^{2019} Par 7 est : 6

Exercice13 : Déterminer le reste de la division du nombres $19^{52}\times 23^{41}$ par 7

Solution13 : On a : $19\equiv 5[7]$ donc $19^2\equiv 4[7]$

donc $19^4\equiv 2[7]$ et on a $52=13\times 4$ donc :

$19^{52}\equiv 2^{13}[7]$

On a : $23\equiv 2[7]$ donc $23^{41}\equiv 2^{41}[7]$

$19^{52}\times 23^{41}\equiv 2^{54}[7]$ $(542=3\times 18$)

On a : $2^3\equiv 1[7]\Rightarrow 2^{54}\equiv 1[7]$

donc : $19^{52}\times 23^{41}\equiv 1[7]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $19^{52}\times 23^{41}$ Par 7 est : 1

Exercice14 : Déterminer le reste de la division par 5 du nombres $22^{33}+33^{22}$

Solution14 : On a : $22\equiv 2[5]$ donc $22^{33}\equiv 2^{33}[5]$

Et on a : $33\equiv -2[5]$ donc $33^{22}\equiv 2^{22}[5]$

donc $22^{33}+33^{22}\equiv 2^{33}+2^{22}[5]$

et on a $2^4\equiv 1[5]$ et $33=8\times 4+1$ donc :

$2^{33}=2^{8\times 4+1}=\left(2^4\right)^8\times 2^1$ donc $2^{33}\equiv 2[5]$

on a $2^{22}=\left(2^2\right)^{11}$ et $2^2\equiv -1[5]$ donc $2^{22}\equiv -1[5]$

donc $22^{33}+33^{22}\equiv 2-1[5]$

donc : $22^{33}+33^{22}\equiv 1[5]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $22^{33}+33^{22}$ Par 5 est : 1

Exercice15: Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ 3 divise 4^n-1

Solution15 : Méthode1

Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists k\in\mathbb{N}\,/\,4^n-1=3k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $4^0-1=0$ est un multiple de 3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,4^n-1=3k$ donc $4^n=3k+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :

$\exists k'\in\mathbb{N}\,/\,4^{n+1}-1=3k'$??

$4^{n+1}-1=4\times 4^n-1$

$=4\times(3k+1)-1=12k+4-1=12k+3=3(4k+1)$

avec $k'=4k+1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N};4^n-1$ est divisible par 9

Méthode2

Il suffit de montrer que : $4^n-1\equiv 0[3]$??

On a : $4\equiv 1[3]$ donc $4^n\equiv 1[3]$

Donc : $4^n-1\equiv 0[3]$ Cqfd

Exercice16 : 1) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 7 du nombres 3^n

2)en déduire le reste de la division par 7 du nombres 2019^{2019}

Solution19 : 1) $3^n\equiv r[7]$ et $r\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$

On a : $3^0 \equiv 1[7]$ et $3^1 \equiv 3[7]$ et $3^2 \equiv 2[7]$
et $3^3 \equiv 6[7]$ et $3^4 \equiv 4[7]$ et $3^5 \equiv 5[7]$ et $3^6 \equiv 1[7]$
Si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n = 6k + r$ avec $r \in \{0;1;2;3;4;5\}$
On a : $3^6 \equiv 1[7]$ donc : $\left(3^6\right)^k \equiv 1^k[7]$
donc : $3^{6k} \equiv 1[7]$ et $3^{6k+1} \equiv 3[7]$ et $3^{6k+2} \equiv 2[7]$
et $3^{6k+3} \equiv 6[7]$ et $3^{6k+4} \equiv 4[7]$ et $3^{6k+5} \equiv 5[7]$

Exercice17: Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: 1) $\overline{2}x = \overline{3}$ 2) $x^2 + \overline{3}x = \overline{0}$
3) $\overline{2013}x^3 + \overline{2}x = \overline{k}$

Solution10 : On a : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3}\}$

1)On Dresse une table comme suite :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que
Cette équation n'admet pas de solutions Donc : $S = \varnothing$

1)On Dresse une table comme suite :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
x^2	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}x$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$
$x^2 + \overline{3}x$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :
$\overline{0}$ et $\overline{1}$ sont solutions de l'équation Donc : $S = \{\overline{0};\overline{1}\}$

2) $\overline{2013}x^3 + \overline{2}x = \overline{k} \Leftrightarrow \overline{1}x^3 + \overline{2}x = \overline{k} \Leftrightarrow x^3 + \overline{2}x = \overline{k}$
Car : $2013 = 503 \times 4 + 1$
On Dresse une table comme suite :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
x^3	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$x^3 + \overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Si $\overline{k} = \overline{0}$: $S = \{\overline{0};\overline{2}\}$ Si $\overline{k} = \overline{1}$: $S = \{\overline{3}\}$
Si $\overline{k} = \overline{2}$: $S = \varnothing$ Si $\overline{k} = \overline{3}$: $S = \{\overline{1}\}$

Exercice18 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)^2$ l'équations suivants : $x + \overline{3}y = \overline{1}$

Solution18 :on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4}\}$ Comme suite

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$

$S = \{(\overline{0};\overline{2});(\overline{1};\overline{0});(\overline{2};\overline{3});(\overline{3};\overline{1});(\overline{4};\overline{3});(\overline{4};\overline{4})\}$

Exercice19 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)^2$ les système suivants : $\begin{cases} \overline{3}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases}$

Solution19 :

$$\begin{cases} \overline{3}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\overline{3}+\overline{2}\right)x + \left(\overline{2}+\overline{4}\right)y = \overline{3}+\overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \overline{4} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \overline{1} \\ y = \overline{4} \end{cases}$$ donc $S = \{(\overline{1};\overline{4})\}$

Exercice20 : 1)Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 10 du nombres 3^n
2)en déduire le chiffre des unités du nombres 2019^{2020}
3)Déterminer les valeurs de l'entier naturel n tél que : $3^n + 5n + 2 \equiv 0[10]$

Solution20 :1) $3^n \equiv r[10]$ et $r \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$
On a : $3^0 \equiv 1[10]$ et $3^1 \equiv 3[10]$ et $3^2 \equiv 9[10]$
et $3^3 \equiv 7[10]$ et $3^4 \equiv 1[10]$
Si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n = 4k + r$ avec $r \in \{0;1;2;3\}$
On a : $3^4 \equiv 1[10]$ donc : $\left(3^4\right)^k \equiv 1^k[10]$
donc : $3^{4k} \equiv 1[10]$ et $3^{4k+1} \equiv 3[10]$ et $3^{4k+2} \equiv 9[7]$
et $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

2) le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est le reste dans la division du nombre 2019^{2020} Par 10
cad : on cherche r tel que : $2019^{2020} \equiv r[10]$??
On a : $2019 = 2010 + 9$ donc : $2019 \equiv 9[10]$
donc : $2019^{2020} \equiv 9^{2020}[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 3^{4040}[10]$
or : $4040 = 4 \times 1010 = 4 \times k$
donc : $2019^{2020} \equiv 3^{4k}[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 1[10]$
le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est 1
Autre méthode **:** $2019 \equiv 9[10]$
donc : $2019 \equiv -1[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 1[10]$

3)On Dresse une table comme suite :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
3^n	$\equiv 1[10]$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 9[10]$	$\equiv 7[10]$
$5n$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$
$3^n + 5n + 2$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 1[10]$	$\equiv 4[10]$

donc : $3^n+5n+2\equiv 0[10] \Leftrightarrow n=3k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$

Exercice21 : Déterminer le chiffre des unités du nombres 24537^{2018}

Solution21 : On a : $24537\equiv 7[10]$ donc :

$24537^{2018}\equiv 7^{2018}[10]$ or : $7^2\equiv -1[10]$ donc :

$\left(7^2\right)^{1009}\equiv(-1)^{1009}[10]\equiv -1[10]$

Donc : $24537^{2018}\equiv -1[10]$ donc : $24537^{2018}\equiv 9[10]$

Donc :des unités du nombres 24537^{2018} est 9

Exercice22 : Déterminer tous les entiers naturels n tel que : $2^n\equiv n^2[9]$

Solution22 :on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}=\left\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{6};\bar{7};\bar{8}\right\}$ Comme suite

$\bar{n}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
2^n	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{n}^2$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

$2^n\equiv n^2[9]\Leftrightarrow \bar{n}=\bar{2}$ ou $\bar{n}=\bar{4}$

$2^n\equiv n^2[9]\Leftrightarrow n=2+9k$ ou $n=4+9k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Exercice23 : Résoudre dans $\mathbb{N}$ l' équations suivante : $3^n+5n+1\equiv 0[8]$

Solution23 : methode1 :
on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}=\left\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{6};\bar{7}\right\}$ Comme suite

On a : $3^0\equiv 1[8]$ et $3^1\equiv 3[8]$ et $3^2\equiv 1[8]$

donc : $3^{2k}\equiv 1[8]$ et $3^{2k+1}\equiv 3[8]$

$\bar{n}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
3^n	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{5}n+1$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$
U_n	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$

$3^n+5n+1\equiv 0[8]\Leftrightarrow \bar{n}=\bar{6}$

$3^n+5n+1\equiv 0[8]\Leftrightarrow n=6+8k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Exercice24 : Quel est le reste de la division du nombre $22^{33}\times 33^{22}$ par 5?

Solution24 : On a : $22\equiv 2[5]$ donc $22^{33}\equiv 2^{33}[5]$

Et on a : $33\equiv -2[5]$ donc $33^{22}\equiv 2^{22}[5]$

donc $22^{33}\times 33^{22}\equiv 2^{33}\times 2^{22}[5]$ donc $22^{33}\times 33^{22}\equiv 2^{55}[5]$

et on a $2^4\equiv 1[5]$ et $55=13\times 4+3$ donc :

$2^{55}=2^{13\times 4+3}=\left(2^4\right)^{13}\times 2^3$ donc $2^{55}\equiv 8[5]$ donc

$2^{55}\equiv 3[5]$ Par suite : le reste dans la division du nombre $22^{33}\times 33^{22}$ Par 5 est : 3

Exercice25 : Quel est le reste de la division du nombre 3^{2019} par 2 et par 13?

Solution25 :1)On a : $3\equiv 1[2]$ donc $3^{2019}\equiv 1[2]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 3^{2019} Par 2 est : 1

2)On a : $3\equiv 3[13]$ donc

$3^2\equiv 9[13]\Rightarrow 3^3\equiv 27[13]\Rightarrow 3^3\equiv 1[13]$

Et on a : $2019=3\times 673$ donc :

$\left(3^3\right)^{673}\equiv 1^{673}[13]\Rightarrow 3^{2019}\equiv 1[13]$

Par suite : le reste dans la division du nombre 3^{2019} Par 13 est : 1

Exercice26 : 1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$
$2^{2n}+6n-1$
Est divisible par9

2) En déduire que : $4^n\equiv 3n+1[9]$

Solution26 :1) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$
$\exists k\in\mathbb{N}/2^{2n}+6n-1=9k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $2^{2\times 1}+6\times 1-1=9$ est un multiple de 9
Donc P (1) est vraie.

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/2^{2n}+6n-1=9k$ donc $2^{2n}=9k-6n+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :

$\exists k'\in\mathbb{N}/2^{2n+2}+6(n+1)-1=9k'$??

$2^{2n+2}+6(n+1)-1=2^{2n}\times 2^2+6n+6-1$

$=(9k-6n+1)\times 4+6n+5=9\times 4k-24n+4+6n+5$

$=9\times 4k-18n+9=9\times(4k-2n+1)=9\times k'$

avec $k'=4k-2n+1$ donc P(n+1) est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence on a :
$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $2^{2n}+6n-1$ Est divisible par9

2) on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $9 / 2^{2n}+6n-1$

Donc : $2^{2n}+6n-1\equiv 0[9]$ Donc : $\left(2^2\right)^n\equiv -6n+1[9]$

et on a : $0\equiv 9n[9]$ donc : $4^n\equiv 3n+1[9]$

Exercice27 : Quel est le reste de la division du nombre $1653^{351}+43^{137}$ par 11?

Solution27 : On a : $1653=150\times 11+3$

$1653\equiv 3[11]$ et $43\equiv -1[11]$ donc $(1653)^{351}\equiv 3^{351}[11]$

$43^{137}\equiv(-1)^{137}[11]$ donc : $43^{137}\equiv -1[11]$

On a : $351=70\times 5+1$

donc $(1653)^{351}\equiv 3^{351}[11]\equiv\left(3^5\right)^{70}\times 3[11]\equiv 1\times 3[11]\equiv 3[11]$

donc $1653^{351}+43^{137}\equiv 2[11]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $1653^{351}+43^{137}$ Par 11 est : 2

Exercice28: $n\in\mathbb{N}$ on pose $U_n=4^n-3n-1$

1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\quad U_{n+1}=4U_n+9n$

2) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$ 9 divise 4^n-3n-1

Solution28 :

1) $U_{n+1}=4^{n+1}-3(n+1)-1=4^n\times 4-3n-4$

Or : $U_n=4^n-3n-1\Leftrightarrow U_n+3n+1=4^n$

Donc : $U_{n+1}=(U_n+3n+1)\times 4-3n-4=4U_n+12n+4-3n-4$

$U_{n+1}=4U_n+9n$

2) (récurrence)

1étapes : Pour n=0 nous avons $9/0$

Donc P (0) est vraie.

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $9/4^n-3n-1$ donc $9/U_n$

3étapes : Montrons que : $9/U_{n+1}$??

On a $9/U_n$ et $9/9$ donc $9/4U_n+9n$ donc $9/U_{n+1}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N}$ 9 divise 4^n-3n-1

Exercice29 :montrer que

$7/1^{2019}+2^{2019}+3^{2019}+4^{2019}+5^{2019}+6^{2019}$

Solution29 :on a : $4\equiv-3[7]$ et $5\equiv-2[7]$ et $6\equiv-1[7]$ donc : $4^{2019}\equiv-3^{2019}[7]$ et $5^{2019}\equiv-2^{2019}[7]$ et $6^{2019}\equiv-1^{2019}[7]$

donc : $1^{2019}+2^{2019}+3^{2019}+4^{2019}+5^{2019}+6^{2019}\equiv1+(-1)[7]$

Donc : $1^{2019}+2^{2019}+3^{2019}+4^{2019}+5^{2019}+6^{2019}\equiv0[7]$

Exercice30 : $n\in\mathbb{N}$ on pose $\alpha_n=n^4-n^2+16$

1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ n^2+3n+4 et n^2-3n+4 Sont des nombres pairs

2) En déduire que $\alpha_n=n^4-n^2+16$ n'est pas premier

Solution30 :1)soit $n\in\mathbb{Z}$ $n^2-3n+4\equiv n^2-n[2]$

donc $n^2-3n+4\equiv n(n-1)[2]$ or $n(n-1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc paire

donc $n(n-1)\equiv0[2]$ donc $n^2-3n+4\equiv0[2]$

donc n^2-3n+4 est un nombre paire

et on a : $n^2+3n+4\equiv n^2+n[2]$ donc

$n^2+3n+4\equiv n(n+1)[2]$

Or $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc paire

donc $n(n+1)\equiv0[2]$ donc $n^2+3n+4\equiv0[2]$

donc n^2+3n+4 est un nombre paire

2) $\alpha_n=n^4-n^2+16=(n^2+4)^2-9n^2=(n^2-3n+4)(n^2+3n+4)$

Et puisque n^2-3n+4 et n^2+3n+4 sont des nombres paire

alors : $n^2-3n+4\neq1$ et $n^2+3n+4\neq1$

donc α_n n'est pas un nombre premier

Exercice31 : montrer que $\forall a\in\mathbb{Z}$ $a\wedge(a+1)=1$

Solution31 : on pose $d=a\wedge(a+1)$

$\Rightarrow d/a$ et $d/a+1\Rightarrow d/1\Rightarrow d=1$

Exercice32 : $n\in\mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A=n^2+3$ et $B=n+2$

1) montrer que $A\wedge B=(n+2)\wedge7$

2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n^2+3}{n+2}\in\mathbb{N}$

Solution32 :1)on pose $d=A\wedge B$ et $d'=(n+2)\wedge7$

On a : $d=A\wedge B$

$\Rightarrow d/A$ et $d/B\Rightarrow d/n^2+3$ et $d/n+2$

$\Rightarrow d/n^2+3$ et $d/n+2$ on utilisant la division euclidienne : on trouve : $n^2+3=(n+2)(n-2)+7$

$n^2+3-(n+2)(n-2)=7$

$\Rightarrow d/n^2+3-(n+2)(n-2)$

$\Rightarrow d/7$ et $d/n+2\Rightarrow d/(n+2)\wedge7\Rightarrow d/d'$

Inversement : On a : $d'=(n+2)\wedge7$

$\Rightarrow d'/n+2$ et $d'/7\Rightarrow d'/(n+2)(n-2)$ et $d'/7$

$\Rightarrow d'/(n+2)(n-2)+7$ et $d'/7\Rightarrow d'/n^2+3$ et $d'/7$

donc : $d'/A\wedge B$ donc d'/d

donc d/d' et d'/d et $d\in\mathbb{N}$ et $d'\in\mathbb{N}$ donc

donc $d=d'$ donc : $A\wedge B=(n+2)\wedge7$

2) $\frac{n^2+3}{n+2}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n+2/n^2+3$ et et on a : $n+2/n+2$

Donc : $n+2/A\wedge B$ Donc : $n+2/(n+2)\wedge7$

Donc : $n+2/7$ or 7 est premier donc :

Il faut que $n+2\in\{1;7\}$ ce qui entraine que $n=5$

Exercice33: $a=\left(25^n-1\right)\left(36^n-1\right)$ et $b=\left(5^n-1\right)\left(6^n-1\right)$

Calculer les $a\vee b$ $(n\in\mathbb{N})$

Solution33 :

$a=\left(\left(5^n\right)^2-1\right)\left(\left(6^n\right)^2-1\right)=\left(5^n-1\right)\left(5^n+1\right)\left(6^n-1\right)\left(6^n+1\right)$

$a=b\left(5^n+1\right)\left(6^n+1\right)$ donc : b/a donc : $a\vee b=a$

Exercice34 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes :a) $x^2-y^2=32$ avec $x\succ y$

b) $2xy+2x+y=99$

Solution34 :a) $x^2-y^2=32\Leftrightarrow(x-y)(x+y)=32$

$x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs positif de 32

Et $(x-y)+(x+y)=2x$ est u nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité $32=2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$S=\{(6;2);(9;7)\}$

b) $2xy+2x+y=99\Leftrightarrow 2xy+y+2x+1-1=99$

$\Leftrightarrow y(2x+1)+2x+1=99+1\Leftrightarrow(2x+1)(y+1)=100$

Donc : $2x+1$ et $y+1$ sont des diviseurs positif de 100

$D_{100}=\{1;2;4;5;10;20;25;50;100\}$

$2x+1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y+1$	100	50	25	20	5	4	2	1
x	0			2		12		
y	99			10		3		

$S=\{(0;99);(2;19);(12;3)\}$

Exercice35 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$

Solution35 : $n+2/3n+1$ et $n+2/n+2$

$n+2/3n+1$et $n+2/3n+6$donc

$n+2/(3n+6)-(3n+1)$ donc$n+2/5$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5

Il faut que $n+2\in\{-1;-5;1;5\}$ ce qui entraine que $n\in\{-3;-7;-1;3\}$

On vérifie que que que si $n\in\{-3;-7;-1;3\}$ alors $n+2/3n+1$ avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$ sont : -7 ; -3 ;-1 ;3

Exercice 36 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

Solution36 : Cette fraction a un sens si $n+4\neq 0$, soit $n\neq -4$

On constate que $3n+8=3(n+4)-4$

$n+4$ divise $3(n+4)$, donc $n+4$ divise $3n+8$ si $n+4$ divise -4.

Les diviseurs de -4 sont 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4.

Il faut que $n+4\in\{-4;-2;-1;1;2;4\}$ ce qui entraine que $n\in\{-8;-6;-5;-3;-2;0\}$

On vérifie que -4 n'appartient pas à -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0 avant de conclure.

Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : -8 ; -6 ;-5 ; -3 ; -2 ; 0.

Exercice37 :déterminer **:** $d=(-8316)\wedge 1080$ et $m=8316\vee 1080$

Solution 37: : la décomposition des nombres 8316 et 1080 en produit des facteurs premiers

Donnent : $8316=2^2\times3^3\times7\times11$ et $1080=2^3\times3^3\times5$

$d=8316\wedge1080=2^2\times3^3=108$ et

$m=8316\vee1080=2^3\times3^3\times5\times7\times11=11880$

Exercice38 :si $2=a\wedge b$ et $-12=a\times b$ déterminer **:** $a\vee b$

Solution 38: on a $a\wedge b)\times(a\vee b)=|ab|$

donc : $a\vee b=|a\times b|/a\wedge b=|-12|/2=6$

Exercice 39: n et a et b des entiers naturels

Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Solution39 : soit r le reste de la division euclidienne de n par a et r' le reste de la division euclidienne de q par b on a donc :

$n=aq+r$ et $0\leq r\leq a-1$ et on a : $q=bq'+r'$ et $0\leq r'\leq b-1$ donc on déduit que :

$n=a(bq'+r')+r=abq'+ar'+r$

Et puisque : $0\leq r'\leq b-1$ et $0\leq r\leq a-1$ alors : $ar'+r\leq ab-1$ donc $n=abq'+ar'+r$

$0\leq ar'+r\leq b-1$ conclusion : q' est aussi le quotient de n par ab

Exercice 40: Déterminer le reste de la division euclidienne de $19^{52}\times23^{41}$ par 7

Solution40 :on a $19\equiv 5[7]$ donc $19^2\equiv 4[7]$

donc : $19^4\equiv 2[7]$ donc $19^{52}\equiv 2^{13}[7]$

Et on a $23\equiv 2[7]$ donc $23^{41}\equiv 2^{41}[7]$ donc

$23^{41}\times 19^{52}\equiv 2^{13}\times 2^{41}[7]$

Donc : $23^{41}\times 19^{52}\equiv 2^{54}[7]$

donc $23^{41}\times 19^{52}\equiv\left(2^3\right)^{18}[7]$

donc $23^{41}\times 19^{52}\equiv 8^{18}[7]$

et puisque : $8\equiv 1[7]$ donc $23^{41}\times 19^{52}\equiv 1[7]$

Conclusion :1est le reste de la division euclidienne de $19^{52}\times 23^{41}$ par 7

Exercice41 : 1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ $(n+1)^{2019}-1\equiv 0[n]$

2) montrer que: $\forall n\in\mathbb{N}$ $4^{2n+2}\equiv 1[15]$

Solution41 :1)on a : $n+1\equiv 1[n]$donc :

$(n+1)^{2019}\equiv 1^{2019}[n]$ donc : $(n+1)^{2019}-1\equiv 0[n]$

2) on a : $4^2\equiv 1[15]$ donc : $\left(4^2\right)^{n+1}\equiv 1^{n+1}[15]$

donc : $4^{2n+2}\equiv 1[15]$

Exercice42: $n\in\mathbb{N}$ on pose $U_n=4^n-3n-1$

1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ $U_{n+1}=4U_n+9n$

2) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$ 9 divise 4^n-3n-1

Solution42 :1)on a $U_{n+1}=4^{n+1}-3(n+1)-1$

donc $U_{n+1}=4\times 4^n-3n-3-1$

et puisque : $U_n=4^n-3n-1$ donc :

$4^n=U_n+3n+1$ donc : $U_{n+1}=4U_n+9n$

2) notons P(n) La proposition suivante :

« 9 divise U_n » .Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $U_0=4^0-3\times 0-1=0$ donc 9 divise 0 .

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : « 9 divise U_n »

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que : « 9 divise U_{n+1} » ??

c'est-à-dire Montrons que $U_{n+1}\equiv 0[9]$??

On a d'après l'hypothèse de récurrence :

« 9 divise U_n » donc $U_n\equiv 0[9]$ donc $4U_n\equiv 0[9]$

Et on a : $9n_n\equiv 0[9]$ donc $U_n+9n_n\equiv 0[9]$ donc $U_{n+1}\equiv 0[9]$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$ 9 divise 4^n-3n-1

Exercice43 : Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation: $x^2-x-\bar{2}=\bar{0}$

Solution43 : on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\left\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4}\right\}$

Comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$x^2-x-\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$

Et en utilisant cette une table on déduit que $\bar{2}$ et $\bar{4}$ sont les solutions de l'équation

Donc : $S=\left\{\bar{2};\bar{4}\right\}$

Exercice 44: $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ et $c\in\mathbb{Z}$ et $d\in\mathbb{Z}$ tels que : $a=bc+d$

1) montrer que $a\wedge b=b\wedge d$

2) En déduire que : $a\wedge b=b\wedge(a-bc)$

Solution44 :1)on pose $\Delta_1=a\wedge b$ et $\Delta_2=b\wedge d$

On a : Δ_1/a et Δ_1/b donc Δ_1/a et Δ_1/bc donc $\Delta_1/a-bc$ donc Δ_1/d

donc Δ_1/d et Δ_1/b donc $\Delta_1/b\wedge d$ donc Δ_1/Δ_2

inversement On a : Δ_2/b et Δ_2/d donc Δ_2/d et Δ_2/bc donc $\Delta_2/bc+d$ donc Δ_2/a

donc Δ_2/a et Δ_2/b donc $\Delta_2/a\wedge b$ donc Δ_2/Δ_1

On a donc : Δ_1/Δ_2 et Δ_2/Δ_1 et $\Delta_1\in\mathbb{N}$ et $\Delta_2\in\mathbb{N}$

donc $\Delta_1=\Delta_2$

donc : $a\wedge b=b\wedge d$

2)on a : $a=bc+(a-bc)$ si on prend : $d=a-bc$ et d'après 1) on aura : $a\wedge b=b\wedge d=b\wedge(a-bc)$

Exercice45 : $a\in\mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A=35a+57$ et $B=45a+76$

montrer que $A\wedge B=1$ ou $A\wedge B=19$

Solution45 :1)on pose $d=A\wedge B$

$\Rightarrow d/A$ et $d/B\Rightarrow d/35a+57$ et $d/45a+76$

$\Rightarrow d/9(35a+57)$ et $d/7(45a+76)$

$\Rightarrow d/315a+513$ et $d/315a+532$

$\Rightarrow d/19$ or 19 est premier donc :

Il faut que $d\in\{1;19\}$ ce qui entraine que :

$A\wedge B=1$ ou $A\wedge B=19$

Exercice46 : $x\in\mathbb{N}^*$ et $y\in\mathbb{N}^*$ On considère les deux nombres : $a=9x+4y$ et $b=2x+y$

1)montrer que $x\wedge y=a\wedge b$

2) $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=n^2+5n+13$ et $b=n+3$

a)montrer que $a\wedge b=b\wedge 7$

b)en déduire les valeurs possibles $a\wedge b=d$

c)montrer que : $n\equiv 4[7]\Leftrightarrow a\wedge b=7$

d)en déduire les valeurs de $n\in\mathbb{N}$ tel que : $a\wedge b=1$

Solution46 :1)on pose $d=x\wedge y$ et $d'=a\wedge b$

montrons que : $d=d'$

$d=x\wedge y$ donc : $\Rightarrow d/x$ et $d/y \Rightarrow d/a$ et d/b

Car il divise toute combinaison de x et y

$\Rightarrow d/a\wedge b \Rightarrow d/d'$

Inversement :

$d'=a\wedge b \Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/9x+4y$ et $d'/2x+y$

$\Rightarrow d'/(9x+4y)-4(2x+y)$ et $d'/9(2x+y)-2(9x+4y)$

$\Rightarrow d'/x$ et $d'/y \Rightarrow d'/x\wedge y \Rightarrow d'/d$

ce qui entraine: $d=d'$

2) $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=n^2+5n+13$ et $b=n+3$

a) montrons que $a\wedge b=b\wedge 7$?

la division euclidienne de $n^2+5n+13$ par $n+3$

donne : $n^2+5n+13=(n+3)(n+2)+7$

Donc : $a=b(n+2)+7\Leftrightarrow a-b(n+2)=7$

on pose $d'=b\wedge 7$ et $d=a\wedge b$

montrons que : $d=d'$

$d=a\wedge b\Rightarrow d/a$ et $d/b \Rightarrow d/a-b(n+2)$ et d/b

$\Rightarrow d/7$ et $d/b \Rightarrow d/b\wedge 7 \Rightarrow d/d'$

$d'=b\wedge 7\Rightarrow d'/7$ et $d'/b \Rightarrow d'/b(n+2)+7$ et d'/b

$\Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/a\wedge b \Rightarrow d'/d$

ce qui entraine: $d=d'$

b) les valeurs possibles $a\wedge b=d$??

on a : $a\wedge b=b\wedge 7=d$

donc : $d/7$ donc : $d=1$ ou $d=7$

c)montrons que : $n\equiv 4[7]\Leftrightarrow a\wedge b=7$

$n\equiv 4[7]\Leftrightarrow n+3\equiv 0[7]\Leftrightarrow 7/n+3\Leftrightarrow 7/b\Leftrightarrow b\wedge 7=7\Leftrightarrow b\wedge a=7$

d) les valeurs de $n\in\mathbb{N}$ tel que : $a\wedge b=1$??

$a\wedge b=1\Leftrightarrow n$ n'est pas congrue a 0 modulo 4

$n\equiv 0[7]$ ou $n\equiv 1[7]$ ou $n\equiv 2[7]$ ou $n\equiv 3[7]$ ou $n\equiv 5[7]$ ou $n\equiv 6[7]$

Exercice 47: $n\in\mathbb{Z}$

on pose : $d_n=(2n+8)\wedge(3n+15)$

1) montrer que $d_n/6$

2)déterminer les les entiers relatifs n tel que $d_n=6$

Solution47 :1) on a $d_n=(2n+8)\wedge(3n+15)$

$\Rightarrow d_n/2n+8$ et $d_n/3n+15 \Rightarrow d_n/6n+24$ et $d_n/6n+30$

$\Rightarrow d_n/30-24 \Rightarrow d_n/6$

2) $6=(2n+8)\wedge(3n+15)\Rightarrow 6/2n+8$ et $6/3n+15$

$\Rightarrow \begin{cases}2n+8\equiv 0[6]\\3n+15\equiv 0[6]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2n\equiv 4[6]\\3n\equiv 3[6]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\bar{2}n=\bar{4}\\ \bar{3}n=\bar{3}\end{cases}$

On Dresse une table dans

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4};\bar{5}\}$

Comme suite :

n	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}n$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}n$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$n=\bar{5}$ Est la solution de l'équation

$n=\bar{5}\Leftrightarrow n=5+6k\ k\in\mathbb{Z}$

Inversement :

Si $n=5+6k\ k\in\mathbb{Z}$

$\begin{cases}2n+8\equiv 0[6]\\3n+15\equiv 0[6]\end{cases}$ donc $6/2n+8$ et $6/3n+15$

donc $6/d_n$ et on a $d_n/6$ donc $d_n=6$

Exercice 48: $a\in\mathbb{N}^*$ et $b\in\mathbb{N}^*$ et $a\geq 3$ et a est impair et on pose : $d=(2^a-1)\wedge(2^b+1)$

1) a)montrer que $2^{ab}\equiv 1[d]$

b)montrer que $2^{ab}\equiv -1[d]$

2) En déduire que : $d\in\{1;2\}$

3)montrer que $d=1$

Solution48 :1) a)montrons que $2^{ab}\equiv 1[d]$

On a : $d=(2^a-1)\wedge(2^b+1)$

Donc il existent : $\alpha\in\mathbb{N}^*$ et $\beta\in\mathbb{N}^*$ tels que :

$2^a-1=d\alpha$ et $2^b+1=d\beta$ donc :

$2^{ab}=\left(2^a\right)^b=\left(d\alpha+1\right)^b$

Et on a : $d\alpha+1\equiv1[d]$ Donc $(d\alpha+1)^b\equiv1[d]$

Par suite : $2^{ab}\equiv1[d]$

1) a)montrons que $2^{ab}\equiv-1[d]$

On a : $2^{ab}=\left(2^b\right)^a=\left(d\beta-1\right)^a$

Et on a : $d\beta-11\equiv-1[d]$ Donc $(d\beta-1)^a\equiv(-1)^a[d]$

et puisque a est impair on a $(d\beta-1)^a\equiv-1[d]$

Par suite : $2^{ab}\equiv-1[d]$

2) $d\in\{1;2\}$???

on a : $2^{ab}\equiv1[d]$ et $2^{ab}\equiv-1[d]$ donc $0\equiv2[d]$

donc $d/2$ et on a $d\in\mathbb{N}^*$ donc $d\in\{1;2\}$

3)montrons que $d=1$

On a : 2^a-1 et 2^b-1 sont impairs donc d est impair

Et puisque $d\in\{1;2\}$ donc $d=1$

Exercice49 : montrer que : $2^{4^{n+1}}+5\equiv0[21]\ \forall n\in\mathbb{N}$

Solution49 : on pose $U_n=2^{4^{n+1}}+5$

notons P(n) La proposition suivante :

« $U_n\equiv0[21]$» .Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $U_0=2^4+5=21$ donc $U_0\equiv0[21]$.

Donc P (0) est vraie.

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $U_n\equiv0[21]$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que : « $U_{n+1}\equiv0[21]$» ??

$$U_{n+1}=2^{4^{n+2}}+5=2^{4^{n+1}\times4^1}+5=\left(2^{4^{n+1}}\right)^4+5=\left(U_n-5\right)^4+5$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence :

$U_n\equiv0[21]$ donc $U_n-5\equiv-5[21]$ donc

$(U_n-5)^4+5\equiv(-5)^4+5[21]\equiv16+5[21]\equiv0[21]$

Donc : $U_{n+1}\equiv0[21]$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}\quad 2^{4^{n+1}}+5\equiv0[21]$

Exercice 50 : déterminer le nombre entier naturel n Tel que le quotient de la division euclidienne de n par 25 est p et le reste est p^2 $(p\in\mathbb{N})$

Solution50 : $n\in\mathbb{N}$

$n=25p+p^2$ et $0\le p^2\prec25$ donc $0\le p\prec5$

Donc :

$$\begin{cases}p=0\\n=0\end{cases}ou\begin{cases}p=1\\n=26\end{cases}ou\begin{cases}p=2\\n=54\end{cases}ou\begin{cases}p=3\\n=84\end{cases}ou\begin{cases}p=4\\n=116\end{cases}$$

Donc : $n\in\{0;26;54;84;116\}$

Exercice51: $b\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{Z}$

si q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b déterminer le quotient de la division euclidienne de ab^9-1 par b^{10}

Solution51 : soit r le reste de la division euclidienne de $a-1$ par b donc :

$a-1=bq+r$ et $0\le r\prec b$

Donc : $ab^9-b^9=b^{10}q+rb^9$

Donc : $ab^9-1=b^{10}q+rb^9+b^9-1$

Donc : $ab^9-1=b^{10}q+(r+1)b^9-1$

On montre que : $0\le(r+1)b^9-1\prec b^{10}$???

On a : $0\le r\prec b$ donc $0\le r+1\le b$

donc $0\le(r+1)b^9\le b^{10}$ donc $0\le(r+1)b^9-1\le b^{10}-1$

donc $0\le(r+1)b^9-1\prec b^{10}$

conclusion : q est aussi le quotient de la division euclidienne de ab^9-1 par b^{10}

Exercice52 : 1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(n+1)\equiv0[n^2]$

2) montrer que: $7^{7^{7^{7^{7^{7^7}}}}}\equiv3[10]$

Solution52 :1) on a : $(n+2)^{n+2}=\sum_{k=0}^{n+2}C_{n+2}^k n^k2^{n+2-k}$

Donc :

$$(n+2)^{n+2}=C_{n+2}^0n^02^{n+2}+C_{n+2}^1n2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^kn^k2^{n+2-k}$$

$$(n+2)^{n+2}=2^{n+2}+(n+2)n2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^kn^k2^{n+2-k}$$

Donc : $(n+2)^{n+2}=2^{n+1}\left(2+n^2+2n\right)+n^2\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^kn^k2^{n-k}$

$$(n+2)^{n+2}=2^{n+1}(2+2n)+2^{n+1}n^2+n^2\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^kn^k2^{n-k}$$

$$(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(1+n)=n^2\left(2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^kn^k2^{n-k}\right)$$

on a : $n^2\left(2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^kn^k2^{n-k}\right)\equiv0[n^2]$

donc : $(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(n+1)\equiv0[n^2]$

2) on a : $7\equiv7[10]$ et $7^2\equiv-1[10]$ donc $7^4\equiv1[10]$

Donc : $7^{4k}\equiv 1[10]$ et $7^{4k+1}\equiv 7[10]$ et $7^{4k+2}\equiv 9[10]$

$7^{4k+3}\equiv 3[10]$

On aussi : $7\equiv 3[4]$ et $7^2\equiv 1[4]$

Donc $7^{2k}\equiv 1[4]$ et $7^{2k+1}\equiv 3[4]$

Or : $7^{7^{7^{7^{7}}}}\equiv 1[2]$ (car impair)

Donc : $7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}\equiv 3[10]$

Exercice53 :

1)a)en déduire que : $2^{4k+r}\equiv 2^r[5]\ \forall(k;r)\in\mathbb{N}^2$

b)Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 5 du nombres 2^n

2)montrer que $5 / 17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\ \forall p\in\mathbb{N}^*$

3)montrer que $5 / 1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}$

Solution53 : 1) a)on a : $2^4\equiv 1[5]$ donc

$\left(2^4\right)^k\equiv 1^k[5]$ donc $2^{4k}\equiv 1[5]$ donc $2^{4k}\times 2^r\equiv 2^r[5]$

Donc $2^{4k+r}\equiv 2^r[5]\ \forall(k;r)\in\mathbb{N}^2$

b) $2^n\equiv r[5]$ et $r\in\{0;1;2;3;4\}$

Si $n\in\mathbb{N}$ alors : $n=4k+r$ avec $r\in\{0;1;2;3\}$

donc : $2^{4k}\equiv 1[5]$ et $2^{4k+1}\equiv 2[5]$ et $2^{4k+2}\equiv 4[5]$

et $2^{4k+3}\equiv 3[5]$

2)montrons que $5 / 17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\ \forall p\in\mathbb{N}^*$?

on a : $17\equiv 2[5]$ donc : $17^{4p+2}\equiv 2^{4p+2}[5]$

$32^{4p+3}\equiv -2^{4p+3}[5]$ $17^{4p+2}\equiv 4[5]$

on a : $32\equiv 2[5]$ donc : $32^{4p+3}\equiv 2^{4p+3}[5]$

donc : $32^{4p+3}\equiv 3[5]$ donc $32^{4p+3}\equiv 2[5]$

donc $17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\equiv 4+3+3[5]$

donc $17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\equiv 0[5]$

donc $5 / 17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\ \forall p\in\mathbb{N}^*$

3)

on a : $1\equiv 1[5]$ et $2\equiv 2[5]$ et $3\equiv -2[5]$ et $4\equiv -1[5]$

donc : $1^{2006}\equiv 1^{2006}[5]$ et $2^{2006}\equiv 2^{2006}[5]$ et

$3^{2006}\equiv(-2)^{2006}[5]$ et $4^{2006}\equiv(-1)^{2006}[5]$

donc ; $1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}\equiv 2+2\times 2^{2006}[5]$

$1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}\equiv 2+2^{2007}[5]$

Or : $2007=4\times 501+3$ donc : $2^{2007}\equiv 3[5]$

Donc : $1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}\equiv 2+3[5]\equiv 0[5]$

Exercice54 : déterminer le chiffre des unités des nombres suivants : 1) $2019^{2020^{2021}}$ 2) $1987^{1991^{1983}}$

Solution54 :

1) on a : $2019\equiv -1[10]$ donc

$2019^{2020^{2021}}\equiv(-1)^{2020^{2021}}[10]$ et puisque 2020^{2021}

Est paire donc : $2019^{2020^{2021}}\equiv 1[10]$

le chiffre des unités est 1

2) on a : $1987\equiv 7[10]$ donc $1987^2\equiv 9[10]$

Et $1987^3\equiv 3[10]$ et $1987^4\equiv 1[10]$

Donc : $1987^{4k}\equiv 1[10]$ et $1987^{4k+1}\equiv 7[10]$ et

$1987^{4k+2}\equiv 9[10]$ et $1987^{4k+3}\equiv 3[10]$

$1991^{1983}\equiv ?[4]$

$1991\equiv 3[4]$ et $1991^2\equiv 1[4]$

on a : $1983\equiv 1[2]$ donc : $1991^{1983}\equiv 3[4]$

donc : $1987^{1991^{1983}}\equiv 3[10]$

Le chiffre des unités est 3

Exercice55 : soit $N=\overline{dcba}$ un entier naturel

montrer que : $N\equiv a-b+c-d[11]$

Solution55 :

on a : $N=\overline{dcba}=a+b\times 10+c\times 10^2+d\times 10^3$

et on a : $10\equiv -1[11]$ et $10^2\equiv 1[11]$ et $10^3\equiv -1[11]$

Donc : $N\equiv a-b+c-d[11]$

Exercice56 :

1)En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer : $67\wedge 39$

2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel que : $39u+67v=1$

Solution56 :1)

(1) $67=1\times 39+\boxed{28}$ **(2)** $39=1\times 28+\boxed{11}$

(3) $28=2\times 11+\boxed{6}$ **(4)** $11=1\times 6+\boxed{5}$

(5) $6=1\times 5+\boxed{1}$ **(6)** $5=1\times 5+\boxed{0}$

Donc : $67\wedge 39=1$ c'est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide

2) **(5)** $6=1\times 5+\boxed{1}\Rightarrow 6-1\times 5=\boxed{1}$

$\Rightarrow 6-1\times(11-1\times 6)=\boxed{1}\Rightarrow 2\times 6-1\times 11=\boxed{1}$

$\Rightarrow 2\times(28-2\times 11)-1\times 11=\boxed{1}\Rightarrow 2\times 28-5\times 11=\boxed{1}$

$\Rightarrow 2\times 28-5\times(39-1\times 28)=\boxed{1}\Rightarrow 7\times 28-5\times 39=\boxed{1}$

$\Rightarrow 7\times(67-1\times 39)-5\times 39=\boxed{1}\Rightarrow\boxed{7\times 67-12\times 39=\boxed{1}}$

Exercice57 : montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$
$(3n+1)\wedge(7n+2)=1$

Solution57 : on a **:** $7(3n+1)-3(7n+2)=1$

Donc : $\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que

$u(3n+1)+v(7n+2)=1 \quad u=7$ et $v=-3$

Donc d'après le théorème de Bézout on a :
$(3n+1)\wedge(7n+2)=1$

Exercice58 : montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide :
$\begin{cases} n\equiv 2[11] \\ n\equiv 3[7] \end{cases}$

Solution58 : $\begin{cases} n\equiv 2[11] \\ n\equiv 3[7] \end{cases} \Leftrightarrow \exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n=11x+2 \\ n=7y+3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2 / 11x+2=7y+3$

$\Leftrightarrow \exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2 / 11x-7y=1$ Or on sait que :

$7\wedge 11=1$ Donc d'après le théorème de Bézout :
$\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2 / 11u+7v=1$

Donc il suffit de prendre : $\begin{cases} x=u \\ y=-v \end{cases}$

Donc $\exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n=11x+2 \\ n=7y+3 \end{cases}$

Par suite : l'ensemble des solutions du système est non vide

Exercice59 : résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E)\ 7(x-2)=3(y+1)$

Solution59 : $7(x-2)=3(y+1)\Leftrightarrow 7/3(y+1)$

Or on sait que : $7\wedge 3=1$

Donc d'après le théorème de Gauss : $7/y+1$

Donc $\exists k\in\mathbb{Z} / y+1=7k \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} / y=7k-1$

$(E)\Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2)=3(y+1) \\ \exists k\in\mathbb{Z} / y=7k-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2)=3\times 7k \\ \exists k\in\mathbb{Z} / y=7k-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=3k \\ \exists k\in\mathbb{Z} / y=7k-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3k+2 \\ \exists k\in\mathbb{Z} / y=7k-1 \end{cases}$

Donc $S=\{(3k+2;7k-1) / k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice60 : déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N}$

Solution60 :1) 2) $\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N} \Leftrightarrow n+1 / n(n^2+3n-2)$

or on a : $1=(n+1)\wedge n$ car $(n+1)-n=1$(bezout)

Donc : $n+1 / n^2+8n-2$

La division euclidienne de n^2+3n-2 par $n+1$

Donne : $n^2+3n-2=(n+1)(n+2)-4$

$n+1 / n^2+3n-2$ et $n+1 / n+1 \Rightarrow n+1 / n^2+3n-2-(n+1)(n+2)$

$\Rightarrow n+1 / -4 \Rightarrow n+1 / 4$

Il faut que $n+1\in\{1;2;4\}$ ce qui entraine :
$n\in\{0;1;3\}$

Inversement : On vérifie que 0 ;1 ;3 vérifient
$\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N}$ Avant de conclure que :
$\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N} \Leftrightarrow n\in\{0;1;3\}$

Exercice61 : déterminer dans $\mathbb{N}^2$ les couples
$(x;y) / \begin{cases} x+y=48 \\ x\wedge y=4 \end{cases}$ avec $x\le y$

Solution61 : $\begin{cases} x+y=48 \\ x\wedge y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \exists(x';y')\in\mathbb{N}^2 / \begin{cases} x=4x' \\ y=4y' \\ x+y=48 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists(x';y')\in\mathbb{N}^2 / 4x'+4y'=48$

$\Leftrightarrow \exists(x';y')\in\mathbb{N}^2 / x'+y'=12$

on Dresse une table comme suit :

x'	0	1	2	3	4	5	6
y'	12	11	10	9	8	7	6
x	0	4	8	12	16	20	24
y	48	44	40	36	32	28	24

Donc :
$S=\{(0;48);(4;44);(8;40);(12;36);(16;32);(20;28);(24;24)\}$

Exercice62: résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant: $\begin{cases} 2x\equiv 3[7] \\ 3x\equiv 1[5] \end{cases}$

Solution5762:

$\begin{cases} 2x\equiv 3[7] \\ 3x\equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\equiv -4[7] \\ 3x\equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\equiv -2[7] \\ 3x\equiv 1[5] \end{cases}$

Car $2\wedge 7=1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\equiv 5[7] \\ 3x\equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+7k; k\in\mathbb{Z} \\ 3x\equiv 1[5] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5+7k; k\in\mathbb{Z} \\ 3(5+7k)\equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+7k; k\in\mathbb{Z} \\ k\equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+7k; k\in\mathbb{Z} \\ k=1+5k' \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=5+7(1+5k'); k'\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=35k'+12; k'\in\mathbb{Z}$

$S=\{35k'+12; k'\in\mathbb{Z}\}$

Exercice63: 1)Montrer que : $\forall a \in \mathbb{Z}^*$ et $\forall b \in \mathbb{Z}^*$

on a : $a \wedge b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a \wedge (a+b) = 1 \\ b \wedge (a+b) = 1 \\ a \wedge b(a+b) = 1 \\ (a+b) \wedge ab = 1 \end{cases}$

Solution63: on pose $d = a \wedge (a+b)$ montrons que :

$d = 1$ on a : $d = a \wedge b \Rightarrow d/a$ et $d/a+b$

$\Rightarrow d/a$ et $d/a+b-a$ $\Rightarrow d/a$ et $d/b \Rightarrow d/b \wedge a \Rightarrow$

$d/1 \Rightarrow d = 1$ ce qui entraine: $1 = a \wedge (a+b)$ **(1)**

de même on montre que : $1 = b \wedge (a+b)$ **(2)**

de **(1)** et **(2)** en déduit que **:** $(a+b) \wedge ab = 1$

D'après une proposition

Et on a $a \wedge (a+b) = 1$ et $a \wedge b = 1$ donc

$a \wedge b(a+b) = 1$ D'après la même proposition

Exercice64 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$(2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$

Solution64 :on a : $n^2+5n+6 = (n+2)(n+3)$

Et on a : $(2n+5) - 2(n+2) = 1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$(n+2) \wedge (2n+5) = 1$ **(1)**

De même : on a : $2(n+3) - (2n+5) = 1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$(n+3) \wedge (2n+5) = 1$ **(2)** de **(1)** et **(2)** en déduit

que : $(2n+5) \wedge ((n+3)(n+2)) = 1$

Donc : $(2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$

Exercice65 : en utilisant Fermat Montrer que :

1) $3^{13} + 5^{35} + 7^{57} \equiv 1[11]$

2) $2^{16n+1} + 7^{32n+2} \equiv 0[17]$

Solution65 : 1)On a :11 est premier et 11 ne divise pas 3 alors $3^{10} \equiv 1[11]$ Donc : $3^{13} \equiv 3^3[11] \equiv 5[11]$

De même : On a :11 est premier et 11 ne divise pas 5 alors $5^{10} \equiv 1[11]$ Donc : $5^{35} \equiv 5^5[11] \equiv 1[11]$

De même : On a :11 est premier et 11 ne divise pas 7 alors $7^{10} \equiv 1[11]$

Donc : $7^{57} \equiv 7^7[11] \equiv 6[11]$

Finalement on a : $3^{13} + 5^{35} + 7^{57} \equiv 5+1+6[11] \equiv 1[11]$

2) $2^{16n+1} + 7^{32n+2} \equiv 0[17]$??

On a :17 est premier et 17 ne divise pas 2 alors $2^{16} \equiv 1[17]$ donc : $2^{16n+1} \equiv 2^1[17] \equiv 2[17]$

De même : On a :17 est premier et 1è ne divise pas 7 alors $7^{16} \equiv 1[17]$ donc : $7^{32} \equiv 1[17]$

donc : $7^{32n+2} \equiv 7^2[17] \equiv 15[17]$

Finalement on a : $2^{16n+1} + 7^{32n+2} \equiv 0[17]$

Exercice66 : écrire dans le système de numération a base 3 le nombre 73

Solution66 :

1)On a : $73 = 3 \times 24 + 1$ $q_0 = 24$ et $r_0 = 1$

$24 = 3 \times 8 + 0$ $q_1 = 8$ et $r_1 = 0$

$8 = 3 \times 2 + 2$ $q_2 = 2$ et $r_2 = 2$

$2 = 3 \times 0 + 2$ $q_3 = 0$ et $r_3 = 2$

Donc : $73 = \overline{r_3 r_2 r_1 r_0}_{(3)} = \overline{2201}_{(3)}$

$73 = 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0$

Exercice67 : déterminer les entiers naturels x et y tel que : $\overline{x0y}_{(5)} = \overline{y0x}_{(7)}$

Solution67 :

$\overline{x0y}_{(5)} = \overline{y0x}_{(7)} \Leftrightarrow x \times 5^2 + 0 \times 5^1 + y \times 5^0 = y \times 7^2 + 0 \times 7^1 + x \times 7^0$

$\Leftrightarrow 25x + y = x + 49y \Leftrightarrow 48y = 24x \Leftrightarrow 2y = x$

$\Leftrightarrow (x;y) = (2k;k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \le x \le 3$ et

$0 \le y \le 3$ Donc : $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} ou \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} ou \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Exercice68 :1) résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$\bar{2}x^3 + x + \bar{3} = \bar{0}$

2) déterminer les entiers naturels n tels que :

7 divise $\overline{2013}_{(n)}$

Solution68 : On Dresse une table dans

$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4};;\bar{5};\bar{6}\}$ Comme suite :

n	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}x^3$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$
$\bar{2}x^3 + x + \bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$\bar{2}$ et $\bar{6}$ sont les solutions de l'équation

Donc : $S = \{\bar{2};\bar{6}\}$

2) $\overline{2013}_{(n)} = 2 \times n^3 + 0 \times n^2 + 1 \times n^1 + 3 \times n^0 = 2n^3 + n + 3$

7 divise $\overline{2013}_{(n)} \Leftrightarrow 2n^3 + n + 3 \equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow \bar{2}n^3 + n + \bar{3} = \bar{0}$ Donc : $n = \bar{2}$ ou $n = \bar{6}$

Donc : $n = 7k + 2 / k \in \mathbb{N}$ ou $n = 7k + 6 / k \in \mathbb{N}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs
et exercices
Que l'on devient un mathématicien