

Exercice 1

Soit n un entier de \mathbb{N}^* . On considère la fonction

f_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$

Partie (1) on pose $g(x) = 1 + (x-1)e^x$

1) a) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

b) étudier les variations de g

en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) g(x) > 0$

2) a) calculer les limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x)$$

b) étudier la branche infinie de (C_n) au voisinage de $+\infty$

3) calculer la dérivée f_n puis déduire que f_n est strictement croissants sur $]0, +\infty[$

4) a) étudier la position relative des courbes (C_2) et (C_1)

b) tracer dans un même repère les courbes (C_2) ; (C_1)

Partie (2) 1) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n et $\alpha_n < 1$

2) a) vérifier que $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln \alpha_n$

en déduire que $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est croissante

b) montrer que $(\forall x \in]0, 1]) \frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$

c) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$

puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

Exercice 2

Soit n un entier de \mathbb{N} tel que $n \geq 2$.

On considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$

par : $f_n(x) = \sqrt{x} (\ln x)^n \quad ; \quad x \neq 0$

et $f_n(0) = 0$

I) 1) a) montrer que f_n est continue à droite

de $x_0 = 0$

b) étudier la dérivabilité de f_n à droite de $x_0 = 0$

2) étudier la branche infinie de (C_n) en $+\infty$

3) a) montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\text{et } f_n'(x) = \frac{(\ln x)^{n-1} (2n + \ln x)}{2\sqrt{x}}$$

b) dresser les tableaux de variations de

f_2 et f_3

4) a) étudier la position relative des courbes

(C_2) et (C_3)

b) tracer les deux courbes (C_2) et (C_3) dans un même repère

II) soit g_n la restriction de f_n sur $[1, e]$

1) montrer que l'équation $g_n(x) = 1$ admet une unique solution notée a_n

2) comparer $g_{n+1}(x)$ et $g_n(x)$ puis déduire la monotonie de la suite $(a_n)_{n \geq 2}$

3) on pose $V_n = \ln(a_n)$ pour tout entier $n \geq 2$

a) prouver que $2V_n + n \ln V_n = 0$

en déduire que $(\forall n \geq 2) e^{\frac{-1}{2n}} \leq V_n \leq 1$

b) montrer que $(a_n)_{n \geq 2}$ est convergente et déterminer sa limite