2017–2016	اقتراح	الثانية علوم رياضية

Exercice 1 (2.5 pts)

On pose $I =]-1,1[$, on définie sur I la lois $*$ telle que $(\forall(a,b)\in I^2)\quad a*b=\dfrac{a+b}{1+ab}$

1) Montrer que $*$ est commutative , associative dans I — 0,75 ن
2) Montrer que $(I,*)$ est un groupe commutatif — 0,5 ن
3) On considère l'ensemble $E=\left\{P_a=\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix} \;/\; a\in I\right\}$

a) Montrer que $(\forall(a,b)\in I^2)\quad P_a\times P_b=P_{a*b}$ — 0,5 ن

b) En déduire que $(E,\times)$ est un groupe commutatif et déterminer P_a^{-1} — 0.75 ن

Exercice 2 (3 pts)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\; Z^2-(\sqrt{3}+3i)Z+2(-1+i\sqrt{3})=0$ — 0,5 ن

1) vérifier que le discriminant de (E) s'écrit $\Delta=(\sqrt{3}-i)^2$ puis résoudre (E)

2) le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

on pose $b=2i$; $a=\sqrt{3}+i$ et on considère les points $B(b)$; $A(a)$.

R_1 est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; R_2 la rotation de centre B — 0,5 ن

et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On considère l'application $f=R_2\circ R_1$

a) montrer que $f(B)=A$ — 0,5 ن

b) soit $M(m)$ un point du plan (P) . on pose $N=R_1(M)$ et $M'=f(M)$ — 0.75 ن

(i) déterminer en fonction de m le nombre n affixe de N — 0,5 ن

(ii) montrer que l'affixe de M' est $m'=-m+3i+\sqrt{3}$ en déduire la nature de f — 0,25 ن

c) vérifier que $\dfrac{m'-m}{n-m}=1+i\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}-3i}{m}$ — 0,5 ن

déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que M' , N et M soient alignés

exercice 3 (3.25 pts)

1) montrer que $19^5\equiv 15\;[26]$ — 0,75 ن

2) soit x un entier relatif

Montrer que $x^{13}-x$ est divisible par 2 en déduire que $x^{13}\equiv x\;[26]$ — 0,5 ن — 0,5 ن

3) montrer que si $x^5\equiv y\;[26]$ alors $y^5\equiv x\;[26]$

4) résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^5-26y=19$

Exercice 4 (5.5 pts)

Soit n un entier naturel .

on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_n(x)=\dfrac{e^{nx}}{x^2}$ — 0,5 ن

soit (C_n) la courbe de f_n dans un repère orthonormé

1) a) calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f_n(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to0}f_n(x)$

b) étudier les branches infinies de la courbe $\left(C_n\right)$ 0,25 ن

2) a) montrer que f_n est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et $\left]-\infty,0\right[$ puis calculer $f'\left(x\right)$ 0,5 ن

b) dresser le tableau de variations de f_n 0,5 ن

3) a) montrer que l'équation $f_n\left(x\right)=1$ admet dans $\left]-\infty,0\right[$ une seule solution x_n 0,5 ن

b) montrer que $\left(\forall n \in\geq 2\right)\quad -1 < x_n < -\frac{1}{n}$ 0,5 ن

4) a) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\quad f_{n+1}\left(x_n\right)=e^{x_n}$ en déduire que $\left(x_n\right)_n$ est convergente 0.75 ن

b) prouver que $\left(\forall n\geq 2\right)\quad x_n\geq -\frac{2\ln n}{n}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,x_n$ 1 ن

5) tracer la courbe $\left(C_1\right)$ 0,5 ن

Exercice 5 (5.75 pts)

Partie $\left(1\right)$

Soit la fonction f définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $f\left(x\right)=\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\quad ;\quad x>0$ et $f\left(0\right)=0$

1) montrer que f م est continue à droite de $x_0=0$ 0,5 ن

2) étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0=0$ 0,5 ن

3) calculer $f'\left(x\right)$ et étudier le sens de variations de f puis dresser le tableau de variations 0,5 ن

4) tracer la courbe $\left(C_f\right)$ 0,5 ن

Partie $\left(2\right)$ on considère la fonction F définie sur $\left]1,+\infty\right[$ par : $F\left(x\right)=\int_1^{\frac{1}{\ln x}} f\left(t\right)dt$

1) montrer que F est dérivable sur $\left]1,+\infty\right[$ et calculer $F'\left(x\right)$ 0.75 ن

2) calculer $F\left(e\right)$ en déduire le signe de $F\left(x\right)$ 0,5 ن

3) a) prouver que $\left(\forall x>1\right)\quad F\left(x\right)=\int_x^e \frac{1}{t^2\ln t}dt$ 0,5 ن

b) montrer que $\left(\forall t>1\right)\quad \ln t\leq t-1$ en déduire $\left(\forall x\in\left]1,e\right[\right)\quad F\left(x\right)\geq\int_x^e\frac{1}{e^2\left(t-1\right)}dt$ 0,75 ن

c) calculer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} F\left(x\right)$ 0,5 ن

4) a) vérifier que $\left(\forall x>e\right)\quad \frac{1}{t^2\ln t}\leq\frac{1}{t^2}$ 0,25 ن

b) soit l la limite de F en $+\infty$, montrer que $-\frac{1}{e}<l<0$ et donner le tableau de F 0,5 ن