

Exercices sur les suites implicites

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = x^3 + 2x - 1$

1) a) montrer que f est bijective de \mathbb{R}^+ vers un intervalle J que l'on déterminera

b) déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et $\alpha < 1$

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une et une seule solution v_n

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \alpha \leq v_n \leq 1$

c) étudier la monotonie de $(v_n)_n$

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R}^+ par $f_n(x) = x^3 + x^2 + nx - 2$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n
et que $0 < x_n < 1$

2) Vérifier que $f_{n+1}(x_n) = x_n$ puis déduire que $(x_n)_n$ est décroissante

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction F_n définie sur \mathbb{R}^+ par $F_n(x) = 2x^3 - x^2 + 2(n+1)x - 1$

1) Montrer que $(\exists! a_n \in]0, 1[) F_n(a_n) = 0$

2) Étudier le signe de $F_{n+1}(x) - F_n(x)$

3) étudier la monotonie de $(a_n)_n$

4) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) a_n \leq \frac{1}{n+1}$

Exercice 4

Soient n un entier de \mathbb{N}^* et f_n la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right) + 2x - 1$$

1) étudier le sens de variation de la fonction f_n

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution b_n et $b_n < \frac{1}{2}$

3) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ puis déduire la monotonie de $(b_n)_n$