

Maths :



Racine n^{ème}

$$\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto (x^n)^{-1} = \sqrt[n]{x}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) :$$

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

$\sqrt[n]{\cdot}$ cont sur \mathbb{R}^+ et strictement \nearrow sur \mathbb{R}^+

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) : (\sqrt[n]{x})^n = x ; \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^+) : \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} ; b \neq 0$$

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{n+p}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$$

$$\sqrt[n \cdot p]{a^p} = \sqrt[n]{a}$$

$$\begin{cases} f \text{ cont sur } I \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[n]{f} \text{ cont sur } I$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow A} f(x) = l \\ l > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow A} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$$

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad r \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$$

$$(a^r)^{r'} = a^{r \cdot r'}$$

$$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r$$

$$\begin{cases} p > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{\cdot} \text{ cont sur } \mathbb{R}^+ \\ p < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{\cdot} \text{ cont sur } \mathbb{R}^{++} \end{cases}$$

$$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$\begin{cases} \mu \text{ deri sur } I \\ \mu(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt[n]{\mu}) \text{ deri sur } I$$

$$\begin{cases} p > 0 : \begin{cases} f \text{ cont sur } I \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f^r \text{ cont sur } I \\ p < 0 : \begin{cases} f \text{ cont sur } I \\ f(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f^r \text{ cont sur } I \end{cases}$$

$$(\sqrt[n]{\mu})'(x) = \frac{\mu'(x)}{n(\sqrt[n]{\mu})^{n-1}}$$

$$\begin{cases} \mu \text{ deri sur } I \\ \mu(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \mu^r \text{ deri sur } I$$

$$(\mu^r(x))' = r \mu^{r-1}(x) \cdot \mu'(x)$$

Arctan

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

$$x \mapsto \beta^{-1}(\tan(x)) = \text{Arctan } x$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[) :$$

$$\text{Arctan } x = y \Leftrightarrow \tan y = x$$

$$(\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[) : \text{Arctan}(\tan x) = x$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \tan(\text{Arctan } x) = x$$

Arctan est cont et strictement \nearrow sur \mathbb{R}

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) : \text{Arctan } x = \text{Arctan } y \Leftrightarrow x = y$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan } x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan } x}{x} = 1$$

Arctan est impaire

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{Arctan } x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

x et $\text{Arctan } x$ ont le même signe

$$\text{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \begin{cases} x > 0 : \frac{\pi}{2} \\ x < 0 : -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Arctan dérivé sur \mathbb{R}

μ cont sur I

$\mu(I) \subset \mathbb{R}$

Arctan cont sur \mathbb{R}

\Rightarrow Arctan $\circ \mu$ cont sur I

μ dérivé sur $I \Rightarrow$ Arctan $\circ \mu$ dérivé sur I

$$(\forall x \in I) : (\text{Arctan} \circ \mu)'(x) = \frac{\mu'(x)}{1+(\mu(x))^2}$$

Théorèmes

TVI

$$1 - \begin{cases} f \text{ cont sur } [a; b] \\ \forall \lambda \in [f(a); f(b)] ; \exists c \in [a; b] / f(c) = \lambda \end{cases}$$

$$2 - \begin{cases} f \text{ cont sur } [a; b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists c \in]a; b[/ f(c) = 0$$

$$3 - \begin{cases} f \text{ cont sur } [a; b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \\ f \text{ strictement monotone sur } [a; b] \end{cases} \Rightarrow \exists ! c \in]a; b[/ f(c) = 0$$

T. de la bij réciproque

f def sur $I \subset \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f \text{ cont sur } I \\ f \text{ strictement monotone sur } I \end{cases} \Rightarrow f \text{ bij de } I \text{ vers } f(I)$$

$$\begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in f(I) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases}$$

T. de Rolle

$$\begin{cases} f \text{ cont } [a; b] \\ f \text{ deri sur }]a; b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \Rightarrow \exists c \in]a; b[/ f'(c) = 0$$

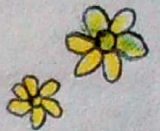
IAF

$$1 - \begin{cases} f \text{ cont sur } [a; b] \\ f \text{ deri sur }]a; b[\end{cases} \Rightarrow \exists c \in]a; b[/ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

IAF

$$\begin{cases} f \text{ cont sur } [a; b] \\ f \text{ deri " }]a; b[\end{cases} \Rightarrow m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a) \\ (\exists m, M \in \mathbb{R}) (\forall x \in]a; b[) / m \leq f'(x) \leq M$$

Limites et continuité



Continuité :

$$f \text{ continue au pt } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Prolongement par continuité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \\ x_0 \notin D_f \end{array} \right. \Rightarrow \tilde{f} = \begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) ; x \in D_f \\ \tilde{f}(x_0) = l \end{cases} \text{ est un prol par cont de } f \text{ en } x_0$$

Composée de fcts :

lim	$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \\ g \text{ cont en } l \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = g(l)$
cont	$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ cont sur } I \\ g \text{ cont sur } f(I) \end{array} \right. \Rightarrow g \circ f \text{ cont sur } I$

Bijection réciproque :

1- f^{-1} et f ont m varietés $\left\{ \begin{array}{l} f^{-1} \text{ sur } f(I) \\ f \text{ sur } I \end{array} \right.$

2- \mathcal{C}_f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont sym par rapport à $(\Delta) y=x$

3- f cont sur $I \Rightarrow f^{-1}$ cont sur $f(I)$

4- Si $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ deri sur } I \\ \forall x \in I : f'(x) \neq 0 \end{array} \right.$ alors f^{-1} deri sur $f(I)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ deri sur } I \\ g \text{ deri sur } J \\ f(I) \subset J \end{array} \right. \Downarrow g \circ f \text{ deri sur } I /$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\forall x \in f(I) : (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Suites numériques

$$(u_n) \text{ majorée} \Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R}) / (\forall n \in \mathbb{I}) : u_n \leq M$$

$$(u_n) \text{ minorée} \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{R}) / (\forall n \in \mathbb{I}) : m \leq u_n$$

$$(u_n) \text{ bornée} \Leftrightarrow m \leq u_n \leq M$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{I}} \nearrow \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{I}} \searrow \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{I}} \text{ cste} \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{I}} \text{ stationnaire} \Leftrightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{I}) / (\forall n \geq n_0) :$$

$$u_n = u_{n_0}$$

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Def	$u_{n+1} = u_n + r$ <small>par raison $r \in \mathbb{R}$</small>	$v_{n+1} = q \cdot v_n$
Terme général	$u_n = u_p + r \cdot (n-p)$	$v_n = v_p \cdot q^{(n-p)}$
Somme	$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{u_n + u_p}{2} (n-p+1)$ <small>\uparrow n^{ème} terme</small>	$S_n = \begin{cases} v_p \cdot \frac{1 - q^{(n-p+1)}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ v_p \cdot (n-p+1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$
propriété caractéristique	$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$	$v_n^2 = v_{n-1} \cdot v_{n+1}$

$$(u_n) \text{ convergente si } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) : |u_n - l| < \epsilon$$

$$(u_n) \text{ divergente si } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) : n \geq N \Rightarrow \begin{cases} u_n > A \\ \text{ou} \\ u_n < -A \end{cases} \\ (u_n) \text{ n'a pas de limite} \end{cases}$$

$$\lim_{+\infty} n^\alpha = +\infty \quad (\alpha > 0)$$

$$\lim_{+\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty$$

$$\lim_{+\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad (p > 0)$$

$$\lim_{+\infty} n^\alpha = 0 \quad (\alpha < 0)$$

$$\lim_{+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$$

$$\begin{cases} u_n \geq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{I}) \\ \lim u_n = l \end{cases} \Rightarrow l \geq 0$$

$$\begin{cases} u_n \geq v_n \\ \lim u_n = l, \lim v_n = l' \end{cases} \Rightarrow l \geq l'$$

$$\begin{cases} |u_n - l| \leq v_n \\ \lim v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim u_n = l$$

$$\begin{cases} (u_n) \nearrow \\ (u_n) \text{ majorée} \end{cases} \Rightarrow (u_n) \text{ convergente}$$

$$\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim v_n = \lim w_n = l \end{cases} \Rightarrow \lim u_n = l$$

$$\begin{cases} (u_n) \searrow \\ (u_n) \text{ minorée} \end{cases} \Rightarrow (u_n) \text{ convergente}$$

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim v_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim u_n = -\infty$$

suite géo

$$\lim_{+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & (a > 1) \\ 0 & (-1 < a < 1) \\ \text{pas de lim} & (a \leq -1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_n \geq v_n \\ \lim v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim u_n = +\infty$$

(u_n) et (v_n) sont adjacentes si

$$\begin{cases} \text{l'une est } \nearrow, \text{ l'autre } \searrow \\ \lim_{+\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{cases}$$

$$u_n = f(v_n)$$

$$\begin{cases} u_n = f(v_n) \\ \lim_{+\infty} v_n = l \\ f \text{ cont en } l \end{cases} \Rightarrow \lim_{+\infty} u_n = f(l)$$

(u_n) et (v_n) sont adjacentes \Rightarrow

$$\begin{cases} (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergentes} \\ (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ ont m\u00eame limite} \end{cases}$$

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- f cont sur I
- $f(I) \subset I$
- $u_{n+1} = f(u_n)$
- $u_{n_0} \in I$
- (u_n) convergente

$$\Rightarrow \lim_{+\infty} u_n = a / a \notin \text{ de l'eq : } f(x) = x$$

Fonctions primitives

F une primitive de f sur I ssi $\begin{cases} F \text{ deri sur } I \\ \forall x \in I: F'(x) = f(x) \end{cases}$

l'ensemble des primitives de f sur I est : $\{ F + R \mid R \in \mathbb{R} \}$

f admet une prim sur I ; $(x_0; y_0) \in I \times \mathbb{R}$

\exists une unique prim H de f sur I / $H(x_0) = y_0$

$\begin{cases} F \text{ une prim de } f \text{ sur } I \\ G \text{ " " " } g \text{ " " } \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F+G \text{ prim de } f+g \text{ sur } I \\ \lambda F \text{ prim de } \lambda f \text{ " " } \end{cases}$

Toute fct cont sur I admet une prim sur I

$f(x)$	$F(x)$	$(u(x))^n \times u'(x)$ $n \neq -1$	$\frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$
0	a	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}$
a	ax	$-\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$\frac{1}{u(x)}$
$a x^n \quad n \neq -1$	$a \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\text{Arctan}(u(x))$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$v'(u(x)) \times u'(x)$	$v(u(x))$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) $
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan } x$	$u'(x) e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b)$	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} \ln ax+b $
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b)$		
$1 + \tan^2(ax+b)$ = $\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a} \tan(ax+b)$		

Fcts logarithmes

Logarithme népérien \rightarrow la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. \ln ou Log

\ln def sur $]0; +\infty[$, stricte \nearrow

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$$

$$\ln(1) = 0; \ln(e) = 1$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

$$x < 1 \Leftrightarrow \ln x < 0$$

$$x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln(x^r) = r \ln x$$

limites

$$\lim_{0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{+\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{0^+} x^n \ln x = 0^-$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \quad r \in \mathbb{Q} / r > 0$$

$$\lim_0 \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_1 \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\begin{aligned} (+) \lim_{+\infty} \frac{\ln(x)^a}{x^b} &= \lim_{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{b/a}} \right)^a \\ &= \lim_{+\infty} \left(\frac{\ln(x^{b/a})}{x^{b/a}} \right)^a \\ &= \lim_{+\infty} \left(\frac{x}{\beta} \right)^a \left(\frac{\ln x}{x^{b/a}} \right)^a \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\beta} \right)^a \cdot \frac{\ln x}{x} \\ &= 0^+ \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} u \text{ deri sur } I \\ u(x) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \mapsto \ln |u(x)| \text{ deri sur } I /$

$$\left(\ln |u(x)| \right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

le signe de $\ln x - \ln a$ est celui de $x - a$ (+)

Logarithme a base a, a > 0, a ≠ 1 \rightarrow fct def sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log_a(a) = 1$$

$$\log_a(a^r) = r$$

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln a}$$

logarithme décimal \rightarrow de base 10 $\log; \log 10 = 1$

Exp exponentielle

Exponentiel népérien \rightarrow bij réciproque de \ln , notée $\exp(x)$ ou e^x

$$\begin{cases} \exp(x) = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

$$\exp :]-\infty; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$$

\exp strict \nearrow sur \mathbb{R} et cont sur \mathbb{R}

$$\exp(x) \leq \exp(y) \Leftrightarrow x \leq y$$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

u deri sur $I \Rightarrow x \mapsto e^{u(x)}$ deri sur I

$$\forall x \in I : (e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

Exponentiel à base a \rightarrow réciproque de \log_a notée $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$
 $a > 0, a \neq 1$

$$\begin{cases} y = \exp_a(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_a(y) \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{x \ln a} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$$

Calcul integral

$$\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

Soit f cont sur I
et F sa prim sur I

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$F(b) - F(a)$ est l'integral de f de a à b /

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$x \mapsto \int_a^b f(x) dx$ est
la prim de f sur I
qui s'annule en a

Chasles :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx = \int_{a_1}^{a_n} f(x) dx$$

$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la prim de
 f qui s'annule en a

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ cont sur } I \\ u \text{ deri sur } J \\ u(J) \subset I \end{array} \right.$

$\Rightarrow \varphi(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt$ est deri sur J

et $\forall x \in J : \varphi'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$

+
pour m q
 φ deri il faut
m q f cont

$$\varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \Rightarrow \varphi'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$$

Techniques de calcul d'intégrales

1. Utilisat° de primitives

2. Integral° par parties

$\left\{ \begin{array}{l} u \text{ et } v \text{ deris sur } I \\ u' \text{ et } v' \text{ cont sur } I \end{array} \right.$

pour le choix de u et v on utilise
ALPES
arctan log poly exp sin et cos

$$\int_a^b [u(x) \cdot v'(x)] dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b [u'(x) v(x)] dx$$

3. Changement de variable

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ cont sur } I \\ u \text{ deri sur } J \\ u(J) \subset I \\ u' \text{ cont sur } J \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \int_a^b f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx$$

ex : on prend $t = u(x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dt}{dx} = u'(x) \text{ ie } dx = \frac{dt}{u'(x)} \\ x = a \Rightarrow t = u(a) \text{ et } x = b \Rightarrow t = u(b) \end{cases}$

donc $\int_a^b f(u(x)) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) \cdot \frac{1}{u'(x)} dt$

f cont sur I , $a, b \in I$

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \\ a < b \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$\begin{cases} a < b \\ f \leq g \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$(a < b) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Th. de la médiane

f cont sur $[a; b]$

$$\exists c \in [a; b] / f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = \mu(f) \leftarrow \text{valeur moyenne de } f$$

Calcul d'aires + volumes

f cont sur $[a; b]$

L'aire de la partie délimitée par (Ox) , $x=a$, $x=b$ et e_f

$$\text{est } \int_a^b |f(x)| dx \text{ u.A.}$$

$$\rightarrow \text{Aire entre 2 courbes : } \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \text{ u.A.}$$

$$\rightarrow \text{Volume d'un solide de révolution : } V(b) = \int_a^b s(t) dt$$

$$\rightarrow \text{volume du solide } \Rightarrow \text{ par la rotat}^\circ \text{ de } (e_f) \text{ autour de } (Ox) \text{ un tour complet de } [a; b] \text{ est } V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \text{ u.V.}$$

$$\text{on pose } s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

f cont sur $[a; b] \Rightarrow (s_n)$ et (S_n) convergentes vers la m. lim /

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

Nombres Complexes

$$x = \text{Re}(z) \quad y = \text{Im}(z)$$

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1 \right\}$$

$$\bullet x=0 \Rightarrow z \in i\mathbb{R}$$

$$\bullet y=0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$\bullet z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$$

$$z + z' = x + x' + i(y + y')$$

$$z z' = x x' - y y' + i(x y' + x' y)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{x x' + y y'}{x'^2 + y'^2} + i \left(\frac{x' y - x y'}{x'^2 + y'^2} \right)$$

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$$

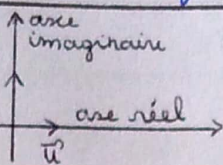
$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

$$(z + z')^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k \cdot z'^{n-k}$$

$$(z - z')^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k \cdot z'^{n-k} \cdot (-1)^{n-k}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Plan Complexe : \vec{w}



Soit $\varphi: (P) \rightarrow \mathbb{C}$

$$M(x, y) \mapsto \varphi(M) = x + iy = z$$

la biject° qui associe a chaque M du plan

son affiche z

image de z

App(M) ou Z_M

$$A, B, C \text{ alignés} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$$

G bary de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$

$$\Leftrightarrow z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$$

$$z_{\lambda \vec{w}} = \lambda z_{\vec{w}}$$

$$z_M = z_{M'} \Leftrightarrow M = M'$$

$$z_{\overline{AB}} = z_B - z_A$$

$$z_{\vec{u} + \vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$$

conjugué $\rightarrow \bar{z} = x - iy$

$$z + \bar{z} = 2x$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

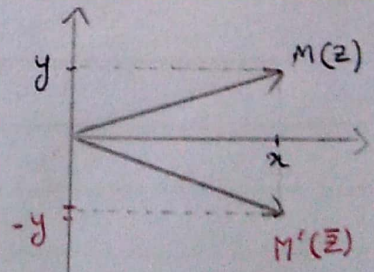
$$z - \bar{z} = 2iy$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$$

$$\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$



$$M'(\bar{z}) = \overline{M(z)}$$

Module $\rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \in \mathbb{R}^+$

$$|z| = |\bar{z}| = |-z|$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

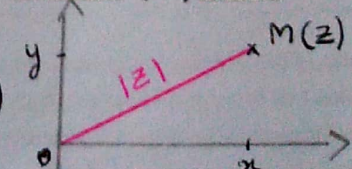
$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$\text{Re}(z) \leq |z|$$

$$\text{Im}(z) \leq |z|$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$|z^n| = |z|^n$$



$$OM = |z|$$

$$|z+z'| = |z| + |z'|$$

$$||z|-|z'|| \leq |z+z'| \leq |z|+|z'|$$

Argument \rightarrow $\text{Arg}(z) \equiv \theta [2\pi]$

$$\text{Arg}(\bar{z}) \equiv -\text{Arg}(z) [2\pi]$$

$$\text{Arg}(z \times z') \equiv \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') [2\pi]$$

$$\text{Arg}(z^n) \equiv n \text{Arg}(z) [2\pi]$$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \text{Arg}(z) = \text{Arg}(z') \end{cases}$$

écriture algèbre \rightarrow trig

soit $z = x + iy \neq 0$

$$\text{donc } z = \sqrt{x^2+y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

$$\text{on a } \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 = 1$$

$$\text{donc } \exists \theta \in \mathbb{R} / \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\bullet \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\bullet r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Formule de Moivre :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

Écriture exp $z = |z| e^{i\theta} \quad \forall z \neq 0 / e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

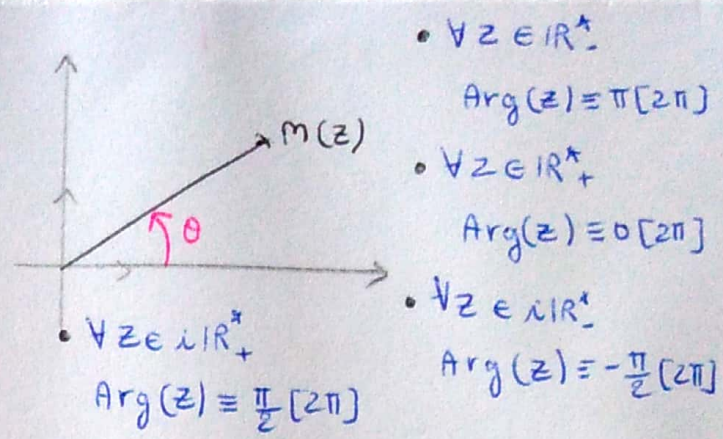
$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2 \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) e^{i \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right)}$$

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) e^{i \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right)}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

(F. d'Euler)



Forme trig $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$

$r = |z| > 0$
 module de z
 $\theta \equiv \text{Arg}(z) [2\pi]$
 coordonnées polaires de $m(z)$

$$\cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$$

$$-\cos \theta + i \sin \theta = \cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta)$$

$$-\cos \theta - i \sin \theta = \cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)$$

$$\sin \theta + i \cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

soient $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$

$$z \cdot z' = [r \cdot r', \theta + \theta']$$

$$\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\theta \right]$$

$$z^n = [r^n, n\theta]$$

$$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right]$$

Transformat géo \rightarrow comp

	géo	Complexe
angles	(\vec{e}_1, \vec{AB})	$\text{Arg}(z_B - z_A)$
	(\vec{AB}, \vec{CB})	$\text{Arg}\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
droites	A, B, C alignés	$\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [\pi] \quad \text{ie} \quad \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
	$(AB) \parallel (CD)$	$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}$
	$(AB) \perp (CD)$	$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in i\mathbb{R}$
	I milieu de [AB]	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
figures	ABCD parallélogramme	$z_D - z_A = z_C - z_B$
	ABCD rectangle	\uparrow " et $\begin{cases} \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \quad (\vec{AB} \perp \vec{AD}) \\ \text{ou} \\ z_D - z_B = z_C - z_A \quad (AC = DB) \end{cases}$
	ABCD losange	$\begin{cases} \text{"} \\ \text{et} \\ \frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R} \quad (\vec{AC} \perp \vec{BD}) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} z_B - z_A &= z_C - z_B \\ &= z_D - z_B \\ &= z_D - z_A \end{aligned}$
	ABCD carré	" et $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \pm i \quad (AD = AB \text{ et } \vec{AB} \perp \vec{AD})$
	A, B, C, D cocycliques	$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \wedge \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \notin \mathbb{R}$ $(\vec{AC}, \vec{AB}) + (\vec{BD}, \vec{BC}) \equiv 0 [\pi] \quad (ABC \text{ non alignés})$
	triangles	ABC équilatéral
ABC rectangle en A		$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
ABC isocèle en A		$ z_C - z_A = z_B - z_A $
ABC rectangle et isocèle en A		$\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Racines n^o de l'unité : $U_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$

La somme des racines n^o de l'unité est nulle

$$= \left\{ e^{i \frac{2k\pi}{n}} / k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$$

Images de racines n^o de l'unité :

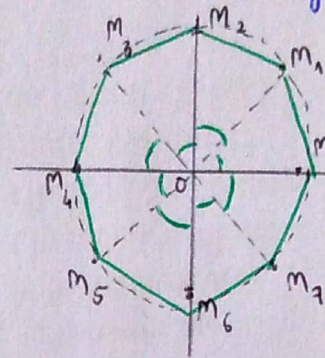
sommets du polygone fermé régulier inscrit ds le cercle trigonométrique.

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - w_k)$$

si une racine n^o de a

⇒ les autres racines n^o de a sont

les n^o comp $z_k = \mu e^{i \frac{2k\pi}{n}} / k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$



n=8 Car

$$\left\{ \begin{array}{l} OM_k = |z_k| = 1 \\ (\vec{OM}_k, \vec{OM}_{k+1}) = \end{array} \right.$$

$$\text{Arg} \left(\frac{z_{n,k+1}}{z_{n,k}} \right) [2\pi]$$

$$\equiv \text{Arg} \left(e^{\frac{2(k+1)\pi}{n} i - \frac{2k\pi}{n} i} \right)$$

[2π]

$$\equiv \frac{2\pi}{n} [2\pi]$$

racine n^o d'un comp non nul :

$$z^n = a \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{|a|} e^{i \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)} / k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$$

Eq de 2^o degré à une inconnue

→ racines carrés d'un $z \neq 0$: $u = re^{i\theta}$ donc les r.c : $\begin{cases} z_1 = \sqrt{|u|} \cdot e^{i \frac{\theta}{2}} \\ z_2 = -\sqrt{|u|} \cdot e^{i \frac{\theta}{2}} \end{cases}$

$u = a + ib$ z r.c de $u \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = (x+iy)^2 = a+ib \\ |z|^2 = |u| \end{cases}$

si $u = \alpha i$ ou $\mu = -\alpha i$

$= \frac{\alpha}{2} 2i$ ou $= -\frac{\alpha}{2} 2i$

Rq :

$= \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}} (1+i)^2 \right]$ ou $= \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}} (1-i)^2 \right]^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

d'où les r.c

$$z_k = \pm \sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} \cdot i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + b^2}}{2} = \alpha \\ y^2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + b^2}}{2} = \beta \end{cases} \quad 2xy = b$$

→ eq de 2^o degré à 1 inconnue $P(z) = az^2 + bz + c$
 $\Delta = b^2 - 4ac$

les 2 r : $\begin{cases} z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \\ z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} \end{cases}$ / δ racine carrée de Δ

→ si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$

et $\Delta < 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \\ z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \end{cases}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$$

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

si $\begin{cases} u \cdot v = P \\ u + v = S \end{cases} \Rightarrow u$ et v r de l'eq $z^2 - Sz + P = 0$

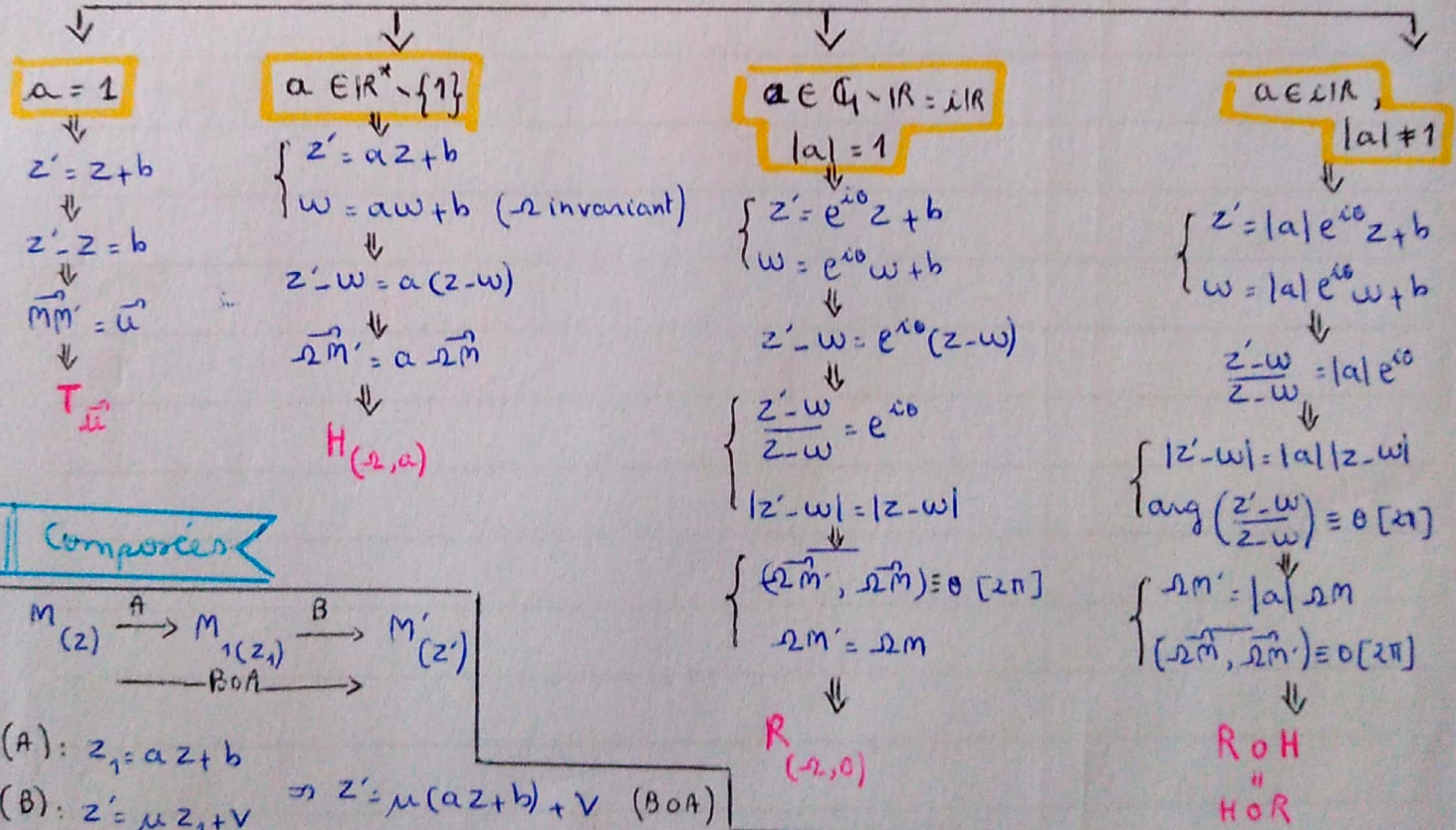
Écriture comp de transformat^os univalentes

$z \mapsto z'$, $M(z)$, $M'(z')$

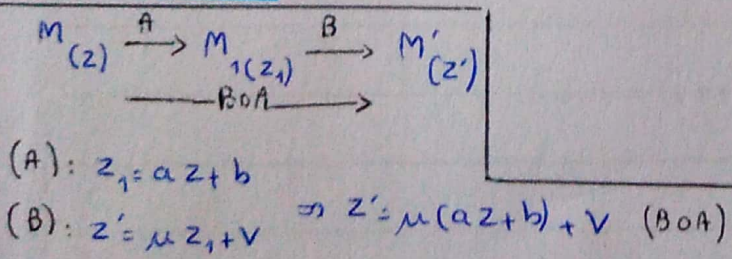
$w = \frac{b}{1-a}$

	geo	complexe
Translat^o $T_{\vec{u}}$	$\vec{m}' = \vec{u} + \vec{m}$	$z' = z + b$
Homothétie $H(a, k)$	$\vec{m}' = k \vec{m}$	$z' = k(z - w) + w$
Rotation $R(a, \theta)$	$\begin{cases} \vec{m}' = a \vec{m} \\ (\vec{m}, \vec{m}') = \theta [2\pi] \end{cases}$	$z' = e^{i\theta} (z - w) + w$
Symétrie axiale (Ox)	$M'(x; -y)$	$z' = \bar{z}$
Symétrie axiale (Oy)	$M'(-x; y)$	$z' = -\bar{z}$
	En général	

$(T) : z' = az + b / a \neq 0$



Composées



$R \circ R'$: $\begin{cases} \text{si } \theta + \theta' = 0 [2\pi] \text{ translato} \\ \text{si } \theta + \theta' \neq 0 [2\pi] \text{ rotato} \end{cases}$

$H \circ T$: homothétie
 $H \circ R$: similitude

$R \circ T$: rotato

Eqs différentielles

solut° générale de

(E): $y' = ay$

$y: x \mapsto \alpha e^{ax} \quad / \alpha \in \mathbb{R}$

(E'): $y' = ay + b$

$y: x \mapsto \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$
/ $\alpha \in \mathbb{R}$

(E''): $y'' + ay' + by = 0$

son eq caractéristique

$r^2 + ar + b = 0$

$\Delta > 0$

l'eq car admet
 $2 \neq r_1 \neq r_2$

$y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Delta = 0$

" " " "
1 \neq double r

$y = (\alpha x + \beta) e^{rx}$
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Delta < 0$

" " " "
 $2 \neq \in \mathbb{C}$
conjugués

$r_1 = p + iq$
 $r_2 = \bar{r}_1$

\rightarrow (E'''): $y'' + by = 0$

$b < 0$
 $w = \sqrt{-b}$

(E'''): $y'' + w^2 y = 0$
 $y = \alpha \cos(wx) + \beta \sin(wx)$

$b > 0$
 $w = \sqrt{-b}$

(E'''): $y'' - w^2 y = 0$
 $y = \alpha e^{wx} + \beta e^{-wx}$

\rightarrow Cas particuliers

$y = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)) e^{px}$

$a=0, b>0$

(E): $y'' + by = 0$

on pose $w = \sqrt{b}$

(E): $y'' + w^2 y = 0$

$y = \alpha \cos(wx) + \beta \sin(wx)$

$a=b=0$

(E): $y'' = 0$

$y = \alpha x + \beta$

$b=0, a \neq 0$

(E): $y'' + ay' = 0$

ou
 $(y' + ay)' = 0$

$y' + ay = \beta$

$y = \alpha e^{-ax} + \frac{\beta}{a}$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(E): $y' = ay + b \quad a, b \in \mathbb{R}$

soit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

$\exists ! \neq \alpha(E) / y(x_0) = y_0$

Structures algébriques

Loi de composition interne $\langle E \neq \emptyset$

$$f: E \times E \rightarrow E$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = x + y / x \cdot y / x * y / \dots$$

f : l.d.c. i ds E

→ matrice carrée d'ordre E à coeff réels : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = N \in M_2(\mathbb{R})$

$$M + N = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}$$

$$MN = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$$

Partie stable $\langle (E, \perp), S \subseteq E$

S partie stable ds $(E, \perp) \Leftrightarrow \forall (x, y) \in S^2: x \perp y \in S$ (loi incluse)

Associativité

$$\forall (x, y, z) \in E^3:$$

$$(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$$

Commutativité

$$\forall (x, y) \in E^2$$

$$x \perp y = y \perp x$$

elt neutre

$$\exists e \in E \wedge \forall x \in E;$$

$$x \perp e = e \perp x = x$$

E et symétrique

x' sym de x ds E

\Leftrightarrow

$$x \perp x' = x' \perp x = e$$

(E, \perp) admet un elt n. e

et a et b de elts symétrisables ds E

$$(a \perp b)' = b' \perp a'$$

e est unique ds E

\perp associative
 \Rightarrow le sym de x de E est unique

homomorphismes $\langle f: E \rightarrow F / (E, \perp) (F, \top)$

f homomorphisme de (E, \perp) vers (F, \top)

$$\text{ssi } \forall (x, y) \in E^2: f(x \perp y) = f(x) \top f(y)$$

$f(E)$ partie stable de (F, \top)

\perp com ds E \Rightarrow \top com ds $f(E)$

\perp ass ds E \Rightarrow \top ass ds $f(E)$

e elt neutre ds E \Rightarrow $f(e)$ elt n ds $f(E)$

x sym de x ds $(E, \perp) \Rightarrow$
 $f(x')$ sym de $f(x)$ ds $(f(E), \top)$

Elts réguliers $\langle (E, \perp), a \in E$

$$a \text{ régulier} \Leftrightarrow (x, y) \in E^2: \begin{cases} x \perp a = y \perp a \Rightarrow x = y \\ a \perp x = a \perp y \Rightarrow x = y \end{cases}$$

Groupe

$(G, *)$ un groupe Ssi

- * associative
- * admet un elt neutre (unique)
- tout elt de G est symétrisable
- + * commutative $\rightarrow (G, *)$ groupe abélien

Sous groupe

$(G, *)$ grp
 $S \subset G$

$(S, *)$ sous grp de $(G, *)$
Ssi \downarrow S part stable de $(G, *)$
- $(S, *)$ grp
 \Leftrightarrow $\left\{ \begin{array}{l} - S \neq \emptyset \\ - \forall (x, y) \in S^2: x * y \in S \\ \quad (y \text{ sym de } x \text{ ds } (G, *)) \end{array} \right.$

f morphisme de (E, \perp) vers (F, \top)
Si (E, \perp) groupe
Alors $(f(E), \top)$ groupe

(E, \perp) groupe
- tout elt de E régulier
- l'eq $a \perp x = b \rightarrow x = a \perp b$
- l'eq $x \perp a = b \rightarrow x = b \perp a'$

Distributivité $(E, *, \top)$

$T \text{ dist / } \alpha * \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \top (y * z) = (x \top y) * (x \top z) \\ (y * z) \top x = (y \top x) * (z \top x) \end{array} \right. \forall x, y, z \in E$

Anneau

$(E, *, \top)$ anneau Ssi

- $(E, *)$ grp commutatif
- \top associative
- \top distrib / $\alpha *$

- + $\top \text{ com} \rightarrow$ anneau com
- + \top admet un elt neutre $1_E \rightarrow$ anneau unitaire
- + anneau intègre
 $\rightarrow [x \top y = 0_E \Rightarrow x = 0_E \text{ ou } y = 0_E]$

Si a inversible ds $(E, \top) \Rightarrow a$ n'est pas un div de 0_E

Corps

$(K, *, \top)$ corps $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} - (K, *) \text{ grp com} \\ - \top \text{ dist / } \alpha * \\ - (K - \{0_K\}, \top) \text{ grp} \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} - (K, *, \top) \text{ anneau unitaire} \\ - \text{tt elt de } K^* \text{ admet un sym part} \end{array} \right.$

$((K, *, \perp) \text{ corps} \Rightarrow (K, *, \perp) \text{ anneau intègre})$

Soit $(A, +, \times)$ anneau et $S \subset A$

S anneau
Pour mq

- on mq $\left\{ \begin{array}{l} 1 - (S, +) \text{ sous grp de } (A, +) \\ 2 - x \text{ L.C.I. ds } S \text{ i.e. } S \text{ stable ds } (A, \times) \\ 3 - \text{ass et com vérifiées ds } A \Rightarrow \text{vérifiées ds } S \end{array} \right.$

Espaces vectoriels réels

$(E, +, \cdot)$ un esp. vect réel ssi E muni de 2 lois

interne (+)

externe (\cdot) : $\cdot : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$
 $(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$

* L.C.I ds $E \Rightarrow$ * L.C.E ds E

i) $(E, +)$ grp com

ii) $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) (\forall x, y \in E) : \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

iii) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) (\forall x \in E) : (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

iv) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) (\forall x \in E) : \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$

v) $\forall x \in E : 1 \cdot x = x$

Ex : $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

$(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ $(\mathcal{L}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ $(\mathbb{Q}^n, +, \cdot)$

corps com

$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$ $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$

$\alpha \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}$

$(-\alpha) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (-\vec{x}) = -\alpha \cdot \vec{x}$

$\alpha(\vec{x} - \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} - \alpha \cdot \vec{y}$

$(\alpha - \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} - \beta \cdot \vec{x}$

sous e.v \mathbb{R} \leftarrow F sous e.v de $(E, +, \cdot)$

ssi F p.s de E

$(F, +, \cdot)$ e.v \mathbb{R}

$\Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset \\ \vec{x} + \vec{y} \in F \\ \alpha \cdot \vec{x} \in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{0}_E \in F \\ \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y} \in F \end{cases}$

Comb linéaire

La comb lin des vect $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in E$ est

$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$

\rightarrow coefs de la combi

Famille génératrice

$F = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ famille de vect de E \mathbb{R} -e.v

F génératrice de E si tt vect de E est comb. lin de $(x_i)_{i \in \{1, n\}}$

$\underline{i.e.} \forall \vec{x} \in E : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} / \vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$

F engendre le vect \vec{x}

lié

$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n /$
 $\begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0} \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0) \end{cases}$

l'un des vect s'écrit comme Comb linéaire des autres

libre

$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

$\text{Dim } E = \text{card } B$

tt fam contenant $\vec{0}$ est liée

tt fam contenant 2 vect = est liée

une fam est libre $\Rightarrow \vec{x}_i \neq \vec{0}$

Base d'un e.v \mathbb{R}

$B = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ est base de $(E, +, \cdot)$ ssi $\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$

$\Leftrightarrow B$ fam libre et génératrice

$B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ libre $\Leftrightarrow \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$

$B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ liée $\Leftrightarrow \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$

Arithmétiques

$$a, b \in \mathbb{Z}$$

$$a/b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / k \cdot a = b$$

$$\oplus b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$$

$$a/a$$

$$\begin{cases} a/b \\ b/c \end{cases} \Rightarrow a/c \quad \begin{cases} a/b \\ b/a \end{cases} \Rightarrow |a| = |b|$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \text{anneau com. unitaire}$$

$$\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} / x \equiv y [n]\}$$

$$\bar{x} = \{x + kn / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \equiv y [n]$$

$$\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset \Leftrightarrow x \not\equiv y [n]$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}$$

$$d = \text{pgcd}(a, b) \Leftrightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} / d = au + vb$$

$$\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \Rightarrow d/a \wedge d/b = d$$

a et b premiers entre eux
ssi $a \wedge b = 1$

Théorème de Bézout

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} / au + bv = 1$$

Théorème de Gauss

$$a, b \in \mathbb{Z}^{\neq 0} : \begin{cases} a/bc \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow a/c$$

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1$$

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^p \wedge b^n = 1$$

$a, b \in \mathbb{N}^{\neq 0}$

$$\mathbb{N}^{\neq 0} : a = bq + r / 0 \leq r < b \Rightarrow a \wedge b = b \wedge r$$

$\mathbb{Z}^{\neq 0} : d = \text{pgcd}(a, b)$ est le dernier reste $\neq 0$ de la div euclidienne de a par b

Algorithme d'Euclide

$$\mathbb{N}^{\neq 0} : a = bq + r / 0 \leq r < b \Rightarrow a \wedge b = b \wedge r$$

$\mathbb{Z}^{\neq 0} : d = \text{pgcd}(a, b)$ est le dernier reste $\neq 0$ de la div euclidienne de a par b

$$\begin{cases} a/c \\ b/c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab/c$$

$$\begin{cases} ax \equiv ay [n] \\ a \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow x \equiv y [n]$$

$$(ac) \wedge (bc) = |c| \cdot (a \wedge b)$$

$$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow a \wedge (bc) = 1$$

$$\begin{aligned} x \wedge y &= 1 \\ \Rightarrow x \wedge (zy) &= x \wedge z \end{aligned}$$

Div euclidienne :

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}^{\neq 0}, \exists ! q, r \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < |b|$$

a congru b modulo n

$$\Leftrightarrow a \equiv b [n]$$

$$\text{i.e. } n/a - b$$

$$\text{i.e. } \exists k \in \mathbb{Z} / a = b + k \cdot n$$

$$a \equiv b [n] \Leftrightarrow$$

$$a + c \equiv b + c [n]$$

$$\begin{cases} a \equiv b [n] \\ c \equiv d [n] \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + c \equiv b + d [n]$$

$$a \equiv b [n] \Rightarrow ac \equiv bc [n]$$

$$a \equiv b [n] \Rightarrow a^p \equiv b^p [n]$$

Pgcd(a, b) = a \wedge b

$$a \wedge b = b \wedge a = |a| \wedge |b| = a \wedge |b| = |a| \wedge |b|$$

$$a \neq 0 \Rightarrow a \wedge 0 = |a|$$

$0 \wedge 0$ non déf

$$a, b \in \mathbb{Z}^{\neq 0} : a/b \Rightarrow a \wedge b = |a|$$

$$d = a \wedge b \text{ si } \begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \Rightarrow |d| \leq d$$

Prop caractéristique :

$$d = \text{anb} \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z} / \begin{cases} - a = \alpha d \\ - b = \beta d \\ - \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$$

$$\text{PPCM}(a, b) = a \vee b = m$$

$$- a/m, b/m$$

$$\oplus a/m', b/m' \Rightarrow m \leq |m'|$$

$$- a \vee b = b \vee a$$

$$- |a| \vee b = a \vee |b| = a \vee b = |a| \vee |b|$$

$$- a/b \Rightarrow a \vee b = |b|, b \neq 0$$

nbre premier $p \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1, 1\}$
 $p \in \mathbb{P}$

$$d/p \Rightarrow d = -1 \text{ ou } 1 \text{ ou } p \text{ ou } -p$$

$$p/a^n \Leftrightarrow p/a$$

$$p/ab \Leftrightarrow p/a \text{ ou } p/b$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} : 1 \leq |k| < p \Rightarrow p \wedge k = 1$$

Théorème de Fermat

$$p \in \mathbb{P}^+, a \in \mathbb{Z} : a^p \equiv a [p]$$

$$\text{si } a \wedge p = 1 \text{ alors } a^{p-1} \equiv 1 [p]$$

Eq diophantienne : $ax + by = c$ (E)

l'eq admet une $\&$ ds \mathbb{Z}^2

ssi $a \wedge b / c$

si (x_0, y_0) $\&$ particulière de (E) alors

$$S = \left\{ \left(x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}, y_0 - \frac{ka}{a \wedge b} \right) / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{cases} a/m' \\ b/m' \end{cases} \Rightarrow m/m'$$

$$(a \wedge b) \cdot (a \vee b) = |ab|$$

$$(ac) \vee (bc) = |c| \cdot (a \vee b)$$

$$a \notin \mathbb{P}$$

le plus petit div > 0 de a est premier

$$a \notin \mathbb{P} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{P} / \begin{cases} p/a \\ p \leq \sqrt{a} \end{cases}$$

$$p \text{ premier} \Leftrightarrow -p \text{ premier}$$