

Les fonctions logarithmiques

1 Le logarithme népérien

Définition :

Le logarithme népérien est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et qui s'annule en 1. On la note \ln .

Conséquences :

★ Le domaine de définition de \ln est $]0, +\infty[$.

★ $\ln(1) = 0$.

★ \ln est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a : $(\forall x \in]0, +\infty[) : \ln'(x) = \frac{1}{x}$

★ \ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

★ Pour tous a et b de $]0, +\infty[$: $a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$ $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$

★ $\ln(x) = 0 \iff x = 1$ $\ln(x) > 0 \iff x > 1$ $\ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1$

Une propriété fondamentale :

Pour tous a et b de $]0, +\infty[$: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Proposition :

Pour tous a et b de $]0, +\infty[$ et r de \mathbb{Q} on a :

★ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ ★ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

★ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ ★ $\ln(a^r) = r\ln(a)$

Proposition :

★ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ ★ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ ★ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

★ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ★ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ ★ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = 0$

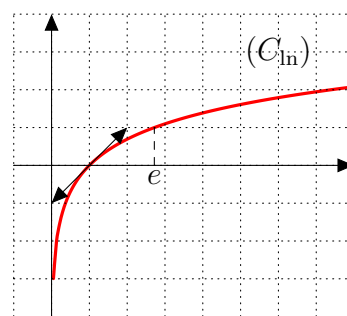
★ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ ★ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \cdot \ln(x) = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

Proposition :

L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution noté e telle que $e = 2,718\dots$

T.v et (C_{\ln}) :

x	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		+
\ln		$+\infty$ ↗ $-\infty$



2 La dérivée logarithmique d'une fonction

Définition :

Soit u une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle I .

La fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ s'appelle La dérivée logarithmique de u sur I .

Proposition :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I telle qu'elle ne s'annule jamais sur I , alors la fonction $f : x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et sa dérivée est La dérivée logarithmique de u .

càd $(\forall x \in I) : f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Proposition :

Soit u une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle I .

Les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln(|u(x)|) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3 Le logarithme à base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

Définition :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

Le logarithme à base a est la fonction noté \log_a et définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Si $a = 10$ on note $\log_{10} = \log$.

Conséquences :

$$\log_a(a) = 1 \qquad \log_a(e) = \frac{1}{\ln(a)} \qquad \log_a(1) = 0 \qquad \log_e = \ln$$

Proposition :

Soient $x, y \in]0, +\infty[$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a :

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y) & ; & \quad \log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y) \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) & ; & \quad \log_a(x^r) = r \log_a(x), (\forall r \in \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

Proposition :

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction \log_a est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) : \log_a'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$$

$0 < a < 1$			$a > 1$		
x	0	$+\infty$	x	0	$+\infty$
\log_a'		-	\log_a'		+
\log_a	$+\infty$	$-\infty$	\log_a	$-\infty$	$+\infty$