Institut Scolaire les Palmiers	Contrôle continu 4 (S1) 27 Novembre 2019	$2^{ème}$ bac SM Durée : 2H

$1^{ère}$ partie 4

0,75 1) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ x > 2\ln x$

0,5 b) Déduire que $(\forall x \in]0;+\infty[)\ x - \ln x > 0$

2) On pose pour tout x de $]0,+\infty[$: $g(x) = x - \ln^2 x$

1,5 a) Montrer que la fonction g est strictement croissante et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

1 b) Déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]0;+\infty[$ puis vérifier que $\alpha < 1$.

0,5 c) Etudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x de $]0;+\infty[$.

$2^{ème}$ partie 9

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par ;

$f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x - \ln x}$ si $x > 0$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0,75 1) a) Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

1 b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

1,25 2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Que dire de la courbe (C) ?

0,75 b) Montrer que $(\exists \beta \in]0;1[)\ /\ f'(\beta) = 0$

1,25 c) Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[)\ f'(x) = \dfrac{x - \ln^2 x}{(x - \ln x)^2}$; déduire que $\beta = \alpha$.

0,5 3) a) Dresser le tableau de variations de f.

0,5 b) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha}{1 + \sqrt{\alpha}}$

1 c) Prouver que $(\forall x \in]0;+\infty[)\ f(x) < x$.

1,5 d) Construire la courbe (C) (on prend : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$; $\alpha \simeq 0,5$ et $f(\alpha) \simeq -0,3$)

$3^{ème}$ partie 4

Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$.

1) a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie

0,5 sur un intervalle J que l'on donnera.

1 b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur J puis calculer $(h^{-1})'\left(\frac{e}{e-1}\right)$

1 c) Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,5 2) a) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists!\, a_n\in]1,+\infty[) \,/\, h(a_n)=\frac{1}{n}$

0,5 b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

1,5 c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln a_n$.

3) On pose : $\varphi(x) = \sqrt[3]{f(x)}$

0,5 a) Déterminer D_φ (Ensemble de définition de la fonction φ)

1 b) Etudier la dérivabilité de φ à droite en 1.

0,5 c) Déterminer le sens de variations de φ sur D_φ