

Exercice 1

Soit n un entier de \mathbb{N} .

On considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2 + 1)}{n}$

- 1) a) calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$
b) étudier la branche infinie de (C_n) au voisinage de $+\infty$
- 2) calculer $f'_n(x)$ étudier le sens de variation de f_n et donner le tableau de variation de f_n
- 3) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n et $0 < \alpha_n < 1$
- 4) tracer la courbe (C_1) (on prend $\alpha_1 \approx 0,77$)
- 5) a) montrer que $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$ puis montrer que $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est croissante et convergente
b) prouver que $1 - \alpha_n \leq \frac{\ln(2)}{2n}$ pour tout n de \mathbb{N}^* et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

Exercice 2

Soit n un entier tel que $n \geq 3$.

On considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1}{x} + n \ln x$

- 1) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x)$
- 2) calculer la dérivée $f'_n(x)$ puis dresser le tableau de variation de f_n
- 3) a) étudier la position des deux courbes (C_n) et (C_{n+1})
b) tracer les courbes (C_3) et (C_4) dans un même repère
- 4) a) montrer que $f_n(x) = 0$ admet deux solutions V_n et U_n tels que $0 < U_n < \frac{1}{n} < V_n \leq 1$

Puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

- b) étudier la monotonie de la suite $(V_n)_n$ en déduire qu'elle est convergente
- 5) exprimer $\ln V_n$ en fonction de V_n et n en déduire la limite de $(V_n)_n$

Exercice 3

soit n un entier de \mathbb{N}^* . On considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$

- 1) calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$
- 2) calculer la dérivée $f'_n(x)$ puis dresser le tableau de variation de f_n
- 3) montrer que $f_n(x) = 0$ admet une seule solution a_n et $a_n < 1$
- 4) étudier la position des courbes de fonctions f_{n+1} et f_n en déduire que $(a_n)_n$ est croissante
- 5) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \ln a_n = \frac{-a_n}{2n+1}$ en déduire la limite de la suite $(a_n)_n$