Suites numériques

EXERCICE (1)

On pose $(\forall n\geq 1)\quad U_n=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$

1) montrer que $(\forall k\geq 1)\quad \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}}\leq \sqrt{k+1}-\sqrt{k}\leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$

2) a) déduire un encadrement du terme U_n de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$

b) déterminer la limite de $(U_n)_{n\geq 1}$

EXERCICE (2)

On pose $u_n=\sqrt[n]{n}-1$ pour tout entier n tel que $n\geq 2$

1) montrer que $(\forall n\geq 2)\quad u_n\geq 0$

2) montrer que $(\forall n\geq 2)\quad n\geq C_n^2(u_n)^2$ en déduire $(\forall n\geq 2)\quad u_n\leq\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$

3) montrer que $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

EXERCICE (3)

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. on considère la fonction f_n définie sur $]0,1[$

par : $f_n(x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)-\dfrac{\pi}{2nx}$

1) montrer que $f_n(x)=0$ admet une unique solution notée α_n

2) montrer que $(\alpha_n)_n$ est décroissante et qu'elle est convergente

3) montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$

4) déterminer la limite de $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n\sqrt{n}$

EXERCICE (4)

Dans chacun des deux cas montrer que $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ sont adjacentes

1) $u_n=\left(\sum_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n+1}$; $v_n=\left(\sum_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n}$

2) $u_n=\prod_{k=1}^{k=n}\cos\left(\dfrac{\pi}{2^k}\right)$; $v_n=u_n\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$

EXERCICE (5)

On pose $S_n=\sum_{p=1}^{p=n}\dfrac{1}{\sqrt{p}}$ et soit la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_n=\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$

1) montrer que $(\forall p\in\mathbb{N}^*)\quad 2\left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)\leq\dfrac{1}{\sqrt{p}}$

2) déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad S_n\geq 2\sqrt{n+1}-2$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

3) monter par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad S_n\leq\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$

Puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

EXERCICE (6)

Déterminer dans chacun des cas suivants la limite de la suite $(U_n)_n$

1) $U_n=5\times 3^{n+1}-2\times 5^n$; 2) $U_n=2^n\sin\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$ و $x\in\mathbb{R}^*$

3) $U_n=\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n}k$ $\quad U_n=\sum_{k=2}^{k=n}\dfrac{2}{k^2-1}$ 4) $U_{n+1}\geq 2U_n$ et $U_0\in\mathbb{R}^{*+}$

5) $U_n=\sum_{p=1}^{p=n}\dfrac{1}{4p^2-1}$ 6) $U_n=\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$

7) $U_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}E(kx)$ et $x\in\mathbb{R}^*$ 8) $U_n=\dfrac{2^n}{n^3}$ 9) $U_n=\dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

10) $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{3^k}$ 11) $U_n=\sum_{k=1}^{k=n^2}\dfrac{1}{1+\sqrt{kn}}$

12) $U_n=\sum_{p=1}^{p=n}\dfrac{1}{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}}$