Exercices d'application et de réflexions avec solutions

Exercices avec solutions
Sur LES SUITES NUMERIQUES

Exercice1: soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1- Calculer les 3 premiers termes.

2- Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : 0 \le u_n$

3- Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \le 2$

Solution :1) on a $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

Pour n=0 on a: $u_1 = \sqrt{u_0 + 2}$ donc $u_1 = \sqrt{2}$

Pour n=1 on a: $u_2 = \sqrt{u_1 + 2}$ donc $u_2 = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$

Pour n=2 on a: $u_3 = \sqrt{u_2 + 2}$ donc

$u_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 2} + 2}$

2) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \le u_n$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $u_0 = 0$ donc $0 \le u_0$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence

Supposons que: $0 \le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $0 \le u_{n+1}$??

Or on a : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \ge 0$

donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : 0 \le u_n$

3) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \le 2$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $u_0 = 0$ donc $u_0 \le 2$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence

Supposons que: $u_n \le 2$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \le 2$??

on a : $u_n \le 2$ donc $u_n + 2 \le 4 \Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \le \sqrt{4}$

$\Rightarrow u_{n+1} \le 2$

donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : 0 \le u_n$

Par suite : : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : 0 \le u_n \le 2$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 0

car $u_n \le 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0

car $0 \le u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad : 0 \le u_n \le 2$

Exercice2: soit $(v_n)_{n\ge1}$ la suite définie par :

$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1)Montrer que $(v_n)_{n\ge1}$ est minorée par 0

2)Montrer que $(v_n)_{n\ge1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3)Que peut-on déduire ?

Solution :1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \le v_n$??

$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ (Le conjugué)

$v_n = \dfrac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \ge 0$

Donc : $0 \le v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $(v_n)_{n\ge1}$ est minorée par 0

2) Montrons que : $v_n \le \frac{1}{2}$?? $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$v_n - \frac{1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} = \dfrac{2 - (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

On a : $n \ge 1$ et $n+1 \ge 2$ donc $\sqrt{n} \ge 1$ et $\sqrt{n+1} \ge \sqrt{2}$

Donc : $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\geq 1+\sqrt{2}$ donc
$-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\leq -1-\sqrt{2}$

donc $2-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\leq 1-\sqrt{2}$ et puisque : $1-\sqrt{2}\prec 0$

Donc $v_n-\frac{1}{2}\prec 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Donc $v_n\prec\frac{1}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3)Donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est bornée car :

$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad :0<v_n<\frac{1}{2}$

Exercice3 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=\frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Soit $n\in\mathbb{N}$ on a :

$-1\leq\cos n\leq 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ et $-1\leq\sin\sqrt{n}\leq 1$

donc :$1\leq 2+\cos n\leq 3$ et $-1\leq -\sin\sqrt{n}\leq 1$

donc :$1\leq 2+\cos n\leq 3$ et $2\leq 3-\sin\sqrt{n}\leq 4$

donc :$1\leq 2+\cos n\leq 3$ et $1/4\leq\frac{1}{3-\sin\sqrt{n}}\leq 1/2$

donc : $1/4\leq\frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}}\leq 3/2$

cad : $1/4\leq u_n\leq 3/2$ donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Exercice4: Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=(-1)^n\sin\sqrt{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Soit $n\in\mathbb{N}$ on a :

$|u_n|=\left|(-1)^n\sin\sqrt{n}\right|=\left|(-1)^n\right|\left|\sin\sqrt{n}\right|=\left|\sin\sqrt{n}\right|\leq 1$

donc $|u_n|\leq 1 \ \forall n\in\mathbb{N}$

donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Exercice5:soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Montrer par récurrence que $u_n\leq u_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Solutions :1étapes :on a $u_1=\sqrt{u_0+2}=\sqrt{2}$

Pour n=0 nous avons $u_0=1$ donc $u_0\leq u_1$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes :Supposons que: $u_n\leq u_{n+1}$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\leq u_{n+2}$??

on a : $u_n\leq u_{n+1}$ donc $u_n+2\leq u_{n+1}+2$

donc : $\sqrt{u_n+2}\leq\sqrt{u_{n+1}+2}$ donc $u_{n+1}\leq u_{n+2}$

Par suite : : $\forall n\in\mathbb{N} \quad :u_n\leq u_{n+1}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Exercice6:soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Solutions :

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}+\frac{2^{n+1}}{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$$

$u_{n+1}-u_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}\succ 0$ Donc : $u_n\leq u_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice7:soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solutions :$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

Et on a : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}=\sum_{k'=2}^{n+2}\frac{1}{n+k'}$ on pose $k'=k+1$

Et puisque k' est un variable on peut l'appeler k'

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}=\sum_{k'=2}^{n+2}\frac{1}{n+k'}=\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n+k}$$

Donc :

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}\succ 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}\succ 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice8:soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4

3)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solutions :1) Montrons que $2\le u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$????

1étapes : n=0 on a : $2\le u_0$ car $2<3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $2\le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $2\le u_{n+1}$??

$$u_{n+1}-2=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-2=\frac{8(u_n-1)-2(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{6u_n-12}{u_n+2}$$

$u_{n+1}-2=\dfrac{6(u_n-2)}{u_n+2}$ et puisque on a : $2\le u_n$

Donc : $u_n-2\ge 0$ et $u_n+2>0$

Donc : $u_{n+1}-2\ge 0$

donc $2\le u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que $u_n\le 4 \quad \forall n\in\mathbb{N}$????

1étapes : n=0 on a : $u_0\le 4$ car $3<4$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $u_n\le 4$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\le 4$??

$$4-u_{n+1}=4-\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{4(u_n+2)-8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{-4u_n+16}{u_n+2}$$

$4-u_{n+1}=\dfrac{4(4-u_n)}{u_n+2}=\dfrac{4(4-u_n)}{u_n+2}$ et puisque on a :

$u_n\le 4$

Donc : $4-u_n\ge 0$ et $u_n+2>0$

Donc $u_{n+1}\le 4$ par suite $u_n\le 4 \ \forall n\in\mathbb{N}$

3) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2}-u_n=\dfrac{8(u_n-1)-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\dfrac{-u_n^2+6u_n-8}{u_n+2}$

On va factoriser $-u_n^2+6u_n-8$: $\Delta=36-32=4>0$

$x_1=\dfrac{-6+2}{-2}=2$ et $x_2=\dfrac{-6-2}{-2}=4$ donc :

$-u_n^2+6u_n-8=-(u_n-2)(u_n-4)$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}$

Or on a : $u_n\ge 2$ et $u_n\le 4$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}\ge 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice9: Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense

Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, répond-t-il, donne-moi seulement 1 centime le 1er juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement. Et donne mois la somme. J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.

Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.

Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

Solution : Les nombres de centimes à payer chaque jour sont les termes d'une suite géométrique de 20 termes dont le premier est : $u_1=1$ et et la raison $q=2$

$u_2=2$ (La somme à donner le 2 iem jour) ....

$u_{20}=...$ (La somme à donner le 20e jour)

Donc : $u_n=u_1\times q^{n-1}=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$

$u_{20}=2^{20-1}=2^{19}=524288$ Centimes

La somme totale à payer serait :

$$s_{20}=u_1+u_2+u_3+...+u_{20}=u_1\frac{1-2^{20-1+1}}{1-2}$$

$s_{20}=2^{20}-1=10485.75$

centimes $s_{20}\simeq 1million$ 500dh Joli voyage !

Exercice10:calculer en fonction de n la somme suivante :

$$s_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+...+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Solutions :1)on pose : $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a : $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison

$q=\frac{1}{2}$ Car : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}$ Donc :

$$s_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Exercice11:soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2}=\frac{1}{27}(12u_{n+1}-u_n) \\ u_0=2;u_1=\frac{4}{9} \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n=u_n-\frac{1}{3^n}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que $u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) a)Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

b) écrire v_n et u_n en fonction de n

c) calculer la somme : $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+...+u_n$

Solution :1)montrons par récurrence que

$u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1étapes : n=0 $u_1=\frac{1}{9}u_0+\frac{2}{3^{0+2}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes :Supposons que: $u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}$

3étapes : Montrons alors que :

$u_{n+2}=\frac{1}{9}u_{n+1}+\frac{2}{3^{n+3}}$??

on a: $u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}$ donc $u_n=9\left(u_{n+1}-\frac{2}{3^{n+2}}\right)$

et on a : $u_{n+2}=\frac{1}{27}(12u_{n+1}-u_n)$

$$u_{n+2}=\frac{1}{27}\left(12u_{n+1}-9\left(u_{n+1}-\frac{2}{3^{n+2}}\right)\right)$$

$u_{n+2}=\frac{1}{27}\left(3u_{n+1}+\frac{2}{3^n}\right)$ donc $u_{n+2}=\frac{1}{9}u_{n+1}+\frac{2}{3^{n+2}}$

Par suite : : $\forall n\in\mathbb{N}\quad :u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}$

2)a) on a: $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{3^{n+1}}$

Donc : $v_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}-\frac{1}{3^{n+1}}=\frac{1}{9}u_n-\frac{1}{3^{n+2}}$

$v_{n+1}=\frac{1}{9}\left(u_n-\frac{1}{3^n}\right)$ donc $v_{n+1}=\frac{1}{9}v_n$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{9}$ et de premier terme $v_0=1$

2) b)écrire v_n et u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{9}$ et de premier terme $v_0=1$

Donc : $v_n=v_0\times q^n \Leftrightarrow v_n=\left(\frac{1}{9}\right)^n\ \forall n\in\mathbb{N}$

Puisque : $u_n=v_n+\frac{1}{3^n}$ donc $u_n=\left(\frac{1}{9}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) c) $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+...+u_n$??

$u_n=v_n+w_n$ avec $w_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

on a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites géométriques de raison $q=\frac{1}{9}$ et $q'=\frac{1}{3}$ donc

donc $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=\sum_{k=0}^{k=n}v_k+\sum_{k=0}^{k=n}w_k$

$$s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=v_0\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}}+w_0\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right)+\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}u_k=\frac{21}{8}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice12 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 \in]-1;0[\end{cases}$$

1) Montrer que $-1 \prec u_n \prec 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrer que $u_{n+1} \geq \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Et en déduire que : $u_n \geq \dfrac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Solution : 1) montrons par récurrence que $-1 \prec u_n \prec 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1étapes : n=0 on a : $-1 \prec u_0 \prec 0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes :Supposons que: $-1 \prec u_n \prec 0$

3étapes : Montrons alors que : $-1 \prec u_{n+1} \prec 0$??

On a : $-1 \prec u_n \prec 0$ donc : $1 \prec u_n + 2 \prec 2$

donc : $1 \prec \sqrt{u_n+2} \prec \sqrt{2}$ donc : $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \prec \dfrac{1}{\sqrt{u_n+2}} \prec 1$

et puisque : $0 \prec -u_n \prec 1$ alors : $0 \prec \dfrac{-u_n}{\sqrt{u_n+2}} \prec 1$

donc : $-1 \prec \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} \prec 0$ donc $-1 \prec u_{n+1} \prec 0$

d'où : $-1 \prec u_n \prec 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\left(1-\sqrt{u_n+2}\right)$$

et puisque : $1-\sqrt{u_n+2} \prec 0$ et $\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} \prec 0$

alors : $u_{n+1} - u_n \succ 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrons que $u_{n+1} \geq \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_n \geq u_0$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante

Donc : $\sqrt{2+u_n} \geq \sqrt{2+u_0}$ cad $\dfrac{1}{\sqrt{2+u_n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2+u_0}}$

et puisque : $u_n \prec 0$ alors : $\dfrac{u_n}{\sqrt{2+u_n}} \geq \dfrac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

Donc : $u_{n+1} \geq \dfrac{u_n}{\sqrt{2+u_0}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

3)Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $0 \succ u_{n+1} \geq \dfrac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

Donc : $0 \leq -u_{n+1} \leq \dfrac{-u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

En donnant à n des valeurs on trouve :

$0 \leq -u_1 \leq \dfrac{-u_0}{\sqrt{2+u_0}}$

$0 \leq -u_2 \leq \dfrac{-u_1}{\sqrt{2+u_1}}$

………

$0 \leq -u_{n-1} \leq \dfrac{-u_{n-2}}{\sqrt{2+u_0}}$

$0 \leq -u_n \leq \dfrac{-u_{n-1}}{\sqrt{2+u_0}}$

Le produit des inégalités donne :

$0 \prec -u_n \leq \dfrac{-u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}$

Donc : $u_n \geq \dfrac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

2) écrire u_n en fonction de n

Solution :

1) $v_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{u_{n+1}} = 1 - \dfrac{2}{\dfrac{u_n}{3-u_n}} = 1 - \dfrac{6-2u_n}{u_n}$

$v_{n+1} = 3\left(1-\dfrac{2}{u_n}\right)$ donc $v_{n+1} = 3v_n$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=3$ et de premier terme $v_0 = -3$

2) écrire u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=3$ et de premier terme $v_0 = -3$

Donc : $v_n = u_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = -3\times 3^n = -3^{n+1} \; \forall n\in\mathbb{N}$

Puisque : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ donc $u_n = \frac{2}{1 - v_n}$ donc $u_n = \frac{2}{1 + 3^{n+1}}$

Exercice13:soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_n = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ démontrer en utilisant la définition que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Solution : Soit $A \succ 0$ on va trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout n ≥ n_0 $u_n \succ A$????

$u_n \succ A \Leftrightarrow n^2 \succ A \Leftrightarrow n \succ \sqrt{A}$

On pose donc : $n_0 = E\left(\sqrt{A}\right) + 1$

Donc : $\boldsymbol{n \geq n_0 \Rightarrow u_n > A}$

Donc : **$(\forall A > 0)(\exists\ n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow u_n > A)$**

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice14:soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n = 3 - 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ démontrer en utilisant la définition que : $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Solution : Soit $A \succ 0$ on va trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout n ≥ n_0 $v_n \prec -A$????

$v_n \prec -A \Leftrightarrow 3 - 2n \prec -A \Leftrightarrow n \succ \frac{A+3}{2}$

On pose donc : $n_0 = E\left(\frac{A+3}{2}\right) + 1$

Donc : $\boldsymbol{n \geq n_0 \Rightarrow v_n \prec -A}$

Donc : **$(\forall A > 0)(\exists\ n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow v_n < -A)$**

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Exercice15: soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ démontrer en utilisant la définition que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Solution : Soit $\varepsilon \succ 0$ on va trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout n ≥ n_0 **$|u_n - 0| < \varepsilon$)** ????

$|u_n| \prec \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} \prec \varepsilon \Leftrightarrow n \succ \frac{1}{\varepsilon}$

On pose donc : $n_0 = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$

On a donc : $\boldsymbol{n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \prec \varepsilon \Rightarrow |u_n - 0| \prec \varepsilon}$

Donc : **$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - 0| < \varepsilon)$**

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice16:soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n = \frac{3n-1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ démontrer en utilisant la définition que : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 3$

Solution : Soit $\varepsilon \succ 0$ on va trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout n ≥ n_0 **$|v_n - 3| < \varepsilon$)** ????

$|v_n - 3| \prec \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{3n-1}{n+1} - 3\right| \prec \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{4}{n+1}\right| \prec \varepsilon \Leftrightarrow n \succ \frac{1}{\varepsilon}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{n+1} \prec \varepsilon \Leftrightarrow n + 1 \succ \frac{4}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \succ \frac{4}{\varepsilon} - 1$

On pose donc : $n_0 = E\left(\left|\frac{4}{\varepsilon} - 1\right|\right) + 1$

On a donc : $\boldsymbol{n \geq n_0 \Rightarrow |v_n - 3| \prec \varepsilon}$

Donc : **$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |v_n - 3| < \varepsilon)$**

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 3$

Exercice17:soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_n = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Démontrer en utilisant la définition que : cette suite est divergente

Solution : *supposons que :* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie l

Alors : Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$(\exists\ n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |(-1)^n - l| < \frac{1}{2})$

Et puisque : $2n \geq n$ et $2n+1 \geq n$ alors :

$n \geq n_0 \Rightarrow (|1 - l| < \frac{1}{2})$ et $(|-1 - l| < \frac{1}{2})$

Donc : $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{2} \prec l \prec \frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2} \prec l \prec -\frac{1}{2}$

Absurde : conclusion $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice18: Utiliser les Opération sur les limites des suites pour calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \frac{2}{3n} + \frac{5}{n^2} - 1$ ***2)*** $\lim_{n\to+\infty} \left(-3 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

3) $\lim_{n\to+\infty} n^2 - n$ ***4)*** $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} - 2n$

5) $\lim_{n\to+\infty} 4n^2 - 2n - 5$ ***6)*** $\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5}$

7) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2 - 3n + 2} - n$

Solutions :

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}}-\frac{2}{3n}+\frac{5}{n^2}-1=0-0+0-1=-1$

Car : $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}}=0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2}=0$

2) $\lim_{n\to+\infty} \left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=(-3+0)(1+0)=(-3)(1)=-3$

Car : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}=0$

3) $\lim_{n\to+\infty} n^2-n$ directement on trouve une forme indéterminée $(+\infty-\infty)$

$\lim_{n\to+\infty} n^2-n=\lim_{n\to+\infty} n(n-1)=+\infty$

Car : $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} n-1=+\infty$ et $+\infty\times+\infty=+\infty$

4) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}-2n$ directement on trouve une forme indéterminée $(+\infty-\infty)$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}-2n=\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(1-2\sqrt{n}\right)=-\infty$

Car : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(1-2\sqrt{n}\right)=-\infty$ et $+\infty\times-\infty=-\infty$

5) $\lim_{n\to+\infty} 4n^2-2n-5=\lim_{n\to+\infty} n^2\left(4-\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}\right)$

Et puisque : $\lim_{n\to+\infty} -\frac{2}{n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{-5}{n^2}=0$ et $\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty$

Alors : $\lim_{n\to+\infty} 4n^2-2n-5=+\infty$

6)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}=\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{4}{3}$$

car : $\lim_{n\to+\infty} -\frac{3}{n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{-7}{n^2}=0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2}=0$

7)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2-3n+2}-n=\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2-3n+2}+n\right)\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)}{\left(\sqrt{n^2-3n+2}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-3n+2-n^2}{\sqrt{n^2-3n+2}+n}=\lim_{n\to+\infty} \frac{-3n+2}{\sqrt{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}+n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(-3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}+1\right)}\lim_{n\to+\infty} \frac{-3+\frac{2}{n}}{\sqrt{\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}+1}=-\frac{3}{2}$$

Exercice19 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1$ 2) $\lim_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9$

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{9n-3}{3n+5}$ 4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1}$ 5) $\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$

6) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4}$

Solutions :

1) $\lim_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1=\lim_{n\to+\infty} 4n^3=+\infty$

2) $\lim_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9=\lim_{n\to+\infty} -2n^5=-\infty$

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{9n-3}{3n+5}=\lim_{n\to+\infty} \frac{9n}{3n}=\frac{9}{3}=3$

4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1}=\lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2}{3n}=\lim_{n\to+\infty} \frac{3\times2\times n\times n}{3n}=\lim_{n\to+\infty} 2\times n=+\infty$

5) $\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}=\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2}{14n^3}=\lim_{n\to+\infty} \frac{7n\times n}{14n\times n\times n}=\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}=0$

6) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4}=\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^5}=\lim_{n\to+\infty} \frac{n\times n}{n\times n\times n\times n\times n}=\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}=0$

Exercice20: calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ 2) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1}-n$

3) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^5+2n^3-n+4}$ 4) $\lim_{n\to+\infty} nar\tan\frac{1}{n}$

Solutions :

1)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}=0$$

2) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1}-n=\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}=\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\left(\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+n\right)}=\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+1}=\frac{1}{2}$$

3) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^5+2n^3-n+4}=\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{n^5}=\sqrt[3]{+\infty}=+\infty$

4) $\lim_{n\to+\infty} nar\tan\frac{1}{n}$? on pose : $\frac{1}{n}=t$

$n\to+\infty \Leftrightarrow t\to 0$

$$\lim_{n\to+\infty} nar\tan\frac{1}{n}=\lim_{t\to0} \frac{ar\tan t}{t}=1$$

Exercice21: Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_n = 2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)montrer que : $v_n \geq \frac{4}{3}n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2)en déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Solutions :1) on a : $(-1)^n \geq -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $2(-1)^n \geq -2$ donc $2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2 \geq -2 + \frac{4}{3}n^2 + 2$

Donc : $v_n \geq \frac{4}{3}n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) on a : $v_n \geq \frac{4}{3}n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim \frac{4}{3}n^2 = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ d'après : Théorème 4

Exercice22: Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_n = 3n + 5\sin n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Solutions : on a : $\sin n \geq -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $5\sin n \geq -5$ donc $v_n \geq 3n - 5$

on a : $v_n \geq 3n - 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim 3n - 5 = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ d'après : Théorème 4

Exercice23: Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_n = -4n + 3\cos n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Solutions : on a : $\cos n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $3\cos n \leq 3$ donc $v_n \leq -4n + 3$

on a : $v_n \leq -4n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim -4n + 3 = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ d'après : Théorème 5

Exercice24: soit (u_n) la suite définie par :

$u_n = 3 + \frac{\sin n}{n^3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Solutions : on a : $u_n = 3 + \frac{\sin n}{n^3}$

donc : $u_n - 3 = \frac{\sin n}{n^3}$ donc : $|u_n - 3| = \left|\frac{\sin n}{n^3}\right|$

donc : $|u_n - 3| \leq \frac{1}{n^3}$ car : $|\sin n| \leq 1$

et puisque : $\lim \frac{1}{n^3} = 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

Exercice25:calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$

Solutions : on a : $-1 \leq \sin n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Or on a : $\lim \frac{-1}{n} = \lim \frac{1}{n} = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Exercice26: soit $(v_n)_{n\geq 4}$ la suite récurrente

définie par : $\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{5v_n}{n+1} \\ v_4 = 10 \end{cases}$

montrer que La suite ($(v_n)_{n\geq 4}$ est convergente.

Solutions : 1) $v_{n+1} - v_n = \frac{5v_n}{n+1} - v_n = \frac{4-n}{n+1}v_n$

Et puisque $v_n \succ 0$: $\forall n \geq 4$ (vérifier le par récurrence)

Alors : $v_{n+1} - v_n \leq 0 \quad \forall n \geq 4$ Donc : ($(v_n)_{n\geq 4}$ est décroissante

Et puisque : $v_n \succ 0 \quad \forall n \geq 4$ alors $(v_n)_{n\geq 4}$ est minorée par 0 *Conclusion :* $(v_n)_{n\geq 4}$ est convergente

Exercice27 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n+2}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n - 2\sin\frac{1}{n}}{4n + \sin\frac{1}{n}}$

Solutions : 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n+2}$??

on a : $-1 \leq \cos n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\frac{-1}{n+2} \leq \frac{\cos n}{n+2} \leq \frac{1}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Or on a : $\lim -\frac{1}{n+2} = \lim \frac{1}{n+2} = 0$ donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n+2} = 0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n - 2\sin\frac{1}{n}}{4n + \sin\frac{1}{n}}$ posons : $u_n = \dfrac{3n - 2\sin\frac{1}{n}}{4n + \sin\frac{1}{n}}$

donc : $\left|u_n - \frac{3}{4}\right| = \frac{11}{4}\left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{4n+\sin\frac{1}{n}}\right|$ (a vérifier)

et on a : $-1 \leq \sin n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ donc :

$4n-1 \leq 4n+\sin\frac{1}{n} \leq 4n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $\frac{1}{4n+1} \leq \frac{1}{4n+\sin\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{4n-1}$

et puisque $\left|\sin\frac{1}{n}\right| \leq 1$ et $\left|\frac{1}{4n+\sin\frac{1}{n}}\right| \leq \frac{1}{4n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $\left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{4n+\sin\frac{1}{n}}\right| \leq \frac{1}{4n-1}$ Donc : $\left|u_n - \frac{3}{4}\right| \leq \frac{11}{4(4n-1)}$

et puisque : $\lim \frac{11}{4(4n-1)} = 0$ alors ;

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n-2\sin\frac{1}{n}}{4n+\sin\frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

Exercice28: Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_{n+1} = v_n + n^4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = 1$

montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Solutions : on a : $v_{n+1} - v_n = n^4 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée ?

Supposons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un $l \in \mathbb{R}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ et on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = l$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} - v_n = 0$ or on a : $v_{n+1} - v_n = n^4$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} - v_n = \lim\limits_{n\to+\infty n} n^4 = +\infty$ absurde$(+\infty = 0)$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée et croissante

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Exercice29 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = x^2 + x + 1$

1. Monter que la suite (u_n) est croissante

2. Montrer que la suite (u_n) est non majorée (Par absurde) .

3. En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice30: Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_n = \sqrt{\frac{2n^2-n+1}{3n^2+4}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Solutions : on pose : $u_n = \frac{2n^2-n+1}{3n^2+4}$

Donc : $v_n = f(u_n)$ avec : $f(x) = \sqrt{x}$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2-n+1}{3n^2+4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{3n^2} = \frac{2}{3}$

Et f est continue en $\frac{2}{3}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Exercice31: calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \tan\left(\frac{\pi n+1}{3n+4}\right)$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\sqrt{\frac{16n^2-3n+1}{2n^2+1}}}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Solutions : 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi n+1}{3n+4} = \frac{\pi}{3}$ et la fonction f tel que : $f(x) = \tan x$ est continue en $\frac{\pi}{3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \tan\left(\frac{\pi n+1}{3n+4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{16n^2-3n+1}{2n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{16n^2}{2n^2} = 8$ et la fonction f tel que : $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$ est continue en 8

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\sqrt{\frac{16n^2-3n+1}{2n^2+1}}} = \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = ?$ on pose : $t = \frac{1}{n}$

$n \to +\infty \Leftrightarrow t \to 0$

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)=1$

et la fonction f tel que : $f(x)=\arctan(x)$ est continue en 1

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\arctan\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$

Exercice32: calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(-5)^n$

Solutions : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ car $a=2>1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ car $-1<a=\frac{2}{3}<1$

$(-5)^n$ N'a pas de limites car $a=-5<-1$

Exercice33 : calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{n\to+\infty}(0,7)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2})^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(4)^{-n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}$

Solutions : $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,7)^n=0$ car $-1<a=0,7<1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2}^n=+\infty$ car $a=\sqrt{2}>1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(-2)^n$ N'a pas de limites car $a=-2<-1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(4)^{-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(4)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ car $-1<a=\frac{1}{4}<1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=+\infty$ car $a=\frac{5}{4}>1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}=+\infty-0=+\infty$ car $a=3>1$ et $-1<\frac{1}{2}<1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(3)^n}{(2)^n}+\frac{(2)^n}{(2)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n+1=+\infty+1=+\infty$

Exercice34: Soit la fonction $f(x)=\frac{1}{2}x+1$

1. Déterminer le point d'intersection de C_f avec la droite (Δ) $y=x$
2. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

a) Poser sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite (u_n)

b) Conjecturer la monotonie de la suite (u_n) et sa limite potentielle.

3. Montrer que la suite (u_n) est croissante majorée par 2.
4. Soit la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}$ $v_n=u_n+\alpha$

a) Déterminer α pour que la suite (v_n) soit géométrique.

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice35 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1) Etudier les variations de f sur $I=[0,1]$ et Montrer que $f(I)\subset I$

2) a) Montrer que :($\forall n\in\mathbb{N}$) $u_n\in I=[0,1]$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Solution : 1) $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{2}}$

La fonction f est croissante et continue sur $I=[0,1]$ donc :

$f(I)=f([0,1])=[f(0),f(1)]=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]\subset[0,1]$

2) a) montrons que :($\forall n\in\mathbb{N}$) $0\le u_n\le 1$

- on a : $0\le u_0\le 1$ la ppté est vraie pour n=0
- supposons que : $0\le u_n\le 1$
- montrons que : $0\le u_{n+1}\le 1$?

on a : $0\le u_n\le 1$ donc $u_n\in I=[0,1]$

donc : $f(u_n)\in f(I)\subset I$ donc : $u_{n+1}\in[0,1]$

donc : $0\le u_{n+1}\le 1$

Conclusion : ($\forall n\in\mathbb{N}$) $0\le u_n\le 1$

2) b) $u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}-u_n$

$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{1+u_n}{2}-u^2{}_n\right)\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n}$

On a : $\frac{1+u_n}{2}-u^2{}_n=\frac{-2u^2{}_n+u_n+1}{2}=\frac{-2(u_n-1)\left(u_n+\frac{1}{2}\right)}{2}$

Et puisque : $0\le u_n\le 1$ alors : $u_{n+1}-u_n\ge 0$

Donc : la suite (u_n) est croissante

et puisque : (u_n) majorée par 1 alors :

(u_n) est convergente.

c) (u_n) est convergente et la limite est solutions de l'équation $f(x) = x$

donc : $l=f(l)\Leftrightarrow l=\sqrt{\frac{1+l}{2}}\Leftrightarrow 2l^2-l-1=0$

donc : $l=1$ ou $l=-\frac{1}{2}$ et puisque : $0\le l\le 1$

donc : $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$

Exercices 36 : Soit la suite (u_n) définie par :

$u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f(x)=\frac{3x+2}{x+2}$

1. Etudier les variations de f et déterminer f ([0,2])
2. a) Montrer que :($\forall n\in\mathbb{N}$) $u_n\in I=[0,2]$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice37: Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n\times n!}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
2. Montrer que ($\forall n\in\mathbb{N}$)($v_n > u_n$)
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Les suites (u_n) et (v_n) sont appelées : Suites adjacentes.

Exercice38 : Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0=a$ et $v_0=b$ avec $0 < a < b < 2a$

$u_nv_n=ab$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$

1. Montrer que ($\forall n\in\mathbb{N}$)($0 < u_n < v_n$)
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante
3. a) Montrer ($\forall n\in\mathbb{N}$) $v_{n+1}-u_{n+1}\prec\frac{1}{2}(v_n-u_n)$

b) En déduire : $\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n$

c) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes

4. Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n)

Exercice39: Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

2) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Solution :

1) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^3}\succ 0$ donc : (u_n) est croissante

$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=-\frac{(n^2+n+1)}{n(n+1)^3}\prec 0$

donc : (v_n) est décroissante.

2)on a $\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et puisque la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante alors Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc convergentes et ont la même limite.

Exercice40: Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+1}$ et $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

2) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Solution :

1) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}\succ 0$

donc : (u_n) est croissante

$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\prec 0$

donc : (v_n) est décroissante.

2)on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n-u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$ et puisque la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante alors Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc convergentes et ont la même limite.

Exercice41: Soit les suites numériques : (x_n) et (u_n) et (v_n) définies par : $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et

$u_n=x_{2n}$ et $v_n=x_{2n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Solution :il suffit de montrer que Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes ???

$u_{n+1}-u_n=x_{2n+2}-x_{2n}=\frac{1}{(2n+1)^2}-\frac{1}{(2n+2)^2}\succ 0$

donc : (u_n) est croissante

$v_{n+1}-v_n=x_{2n+3}-x_{2n+1}=\frac{1}{(2n+3)^2}-\frac{1}{(2n+2)^2}\prec 0$

donc : (v_n) est décroissante.

Et on a

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n-u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1}-x_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=0$

alors Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc convergentes et ont la même limite.

Exercice42 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f(x)=\frac{1}{x+1}$

1)Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

2) on pose : $\alpha_n=u_{2n+1}$ et $\beta_n=u_{2n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que la suite (α_n) est croissante et que la suite (β_n) est décroissante

b) Montrer que : $\alpha_n\le\beta_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrer que : ($\forall n\in\mathbb{N}$) $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$

4) Montrer que $\left|u_{n+1}-u_n\right|\le\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

5)en déduire que la suite (u_n) est convergente Et déterminer la limite de la suite (u_n)

Solution :1) $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}\prec 0$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

Donc f est décroissante Sur $\mathbb{R}^+$

2)on a : $\alpha_n=u_{2n+1}$ et $\beta_n=u_{2n}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $\alpha_{n+1}=(f\circ f)(\alpha_n)$ et $\beta_{n+1}=(f\circ f)(\beta_n)$

Et puisque f est décroissante Sur $\mathbb{R}^+$ et $f(\mathbb{R}^+)\subset\mathbb{R}^+$ alors : $f\circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$

a)montrons que : $\alpha_n\le\alpha_n+1$ et $\beta_{n+1}\le\beta_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

- pour n=0 on a : $\alpha_0=\frac{1}{2}\le\alpha_1=\frac{3}{5}$ et $\beta_1=\frac{2}{3}\le\beta_0=1$
- on suppose que : $\alpha_n\le\alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1}\le\beta_n$
- montrons que : $\alpha_{n+1}\le\alpha_{n+2}$ et $\beta_{n+2}\le\beta_{n+1}$?

on a : $\alpha_n\le\alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1}\le\beta_n$ et puisque $f\circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$ alors :

$(f\circ f)(\alpha_n)\le(f\circ f)(\alpha_{n+1})$ et $(f\circ f)(\beta_{n+1})\le(f\circ f)(\beta_n)$

Donc : $\alpha_{n+1}\le\alpha_{n+2}$ et $\beta_{n+2}\le\beta_{n+1}$

Donc : $\alpha_n\le\alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1}\le\beta_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

donc : (α_n) est croissante et la suite (β_n) est décroissante

b) Montrons que : $\alpha_n\le\beta_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

- pour n=0 on a : $\alpha_0=\frac{1}{2}$ et $\beta_1=1$ donc : $\alpha_0\le\beta_0$
- on suppose que : $\alpha_n\le\beta_n$
- montrons que : $\alpha_{n+1}\le\beta_{n+1}$?

on a : $\alpha_n \le \beta_n$ et puisque $f \circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$ alors : $(f \circ f)(\alpha_n) \le (f \circ f)(\beta_n)$

donc : $\alpha_{n+1} \le \beta_{n+1}$ donc : $\alpha_n \le \beta_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

3) Montrons que : ($\forall n \in \mathbb{N}$) $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$

Puisque : $\alpha_0 \le \alpha_n \le \beta_n \le \beta_0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

Donc : $\frac{1}{2} \le u_{2n+1} \le u_{2n} \le 1$

Donc : $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

3) Montrons que : $|u_{n+1} - u_n| \le \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

• pour n=1 on a : $|u_2 - u_1| = \frac{1}{6}$ donc : $|u_2 - u_1| \le \frac{1}{1}$

• on suppose que : $|u_{n+1} - u_n| \le \frac{1}{n}$

• montrons que : $|u_{n+2} - u_{n+1}| \le \frac{1}{n+1}$?

on a : $|u_{n+2} - u_{n+1}| = \left|\frac{1}{u_{n+1}+1} - \frac{1}{u_n+1}\right|$

$= \frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)}|u_{n+1} - u_n|$

Et on a : $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$ et $\frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$

Donc : $\frac{3}{2} \le 1 + u_n \le 2$ et $\frac{3}{2} \le 1 + u_{n+1} \le 2$

Donc : $\frac{1}{2} \le \frac{1}{u_{n+1}+1} \le \frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2} \le \frac{1}{u_n+1} \le \frac{2}{3}$

Donc : $\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)} \le \frac{4}{9}$ et $|u_{n+1} - u_n| \le \frac{1}{n}$

Donc : $\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)}|u_{n+1} - u_n| \le \frac{4}{9n}$

Et on a : $\frac{1}{n+1} - \frac{4}{9n} = \frac{5n-4}{9n(n+1)} \succ 0$ donc :

$\frac{4}{9n} \prec \frac{1}{n+1}$

Donc : $|u_{n+2} - u_{n+1}| \le \frac{1}{n+1}$

donc : $|u_{n+1} - u_n| \le \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

5)montrons que la suite (u_n) est convergente

Et déterminons la limite de la suite (u_n) ??

On a : $|u_{n+1} - u_n| \le \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

donc : $|u_{2n+1} - u_{2n}| \le \frac{1}{2n} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

donc : $|\alpha_n - \beta_n| \le \frac{1}{2n} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

et puisque : $\lim \frac{1}{2n} = 0$ alors : $\lim \alpha_n - \beta_n = 0$

et puisque (α_n) est croissante et que la suite (β_n) est décroissante alors Les suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes donc convergentes et ont la même limite l

On a : $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = l$

Montrons que : $\lim u_n = l$?

Soit $\varepsilon \succ 0$

$\lim u_{2n} = l$ donc $\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_1 \ |u_{2n} - l| \prec \varepsilon$

$\lim u_{2n+1} = l$ donc $\exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_2 \ |u_{2n+1} - l| \prec \varepsilon$

Soit $N = \sup(n_1; n_2)$ donc : $|u_{2n} - l| \prec \varepsilon$ et $|u_{2n+1} - l| \prec \varepsilon$

Donc : $\forall \varepsilon \succ 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \ |u_n - l| \prec \varepsilon$

Donc $\lim u_n = l$

On a donc :

a) f est continue sur $\mathbb{R}^+$

b) $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$

c) ($\forall n \in \mathbb{N}$)($u_{n+1} = f(u_n)$)

d) $u_0 \in I$ e) (u_n) est convergente

Alors la limite l de la suite (u_n)vérifie l'équation :

$l = f(l)$ et $l \in \mathbb{R}^+$

$l = f(l) \Leftrightarrow l^2 + l - 1 = 0$

donc : $l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $l = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et puisque :

$l \in \mathbb{R}^+$donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice43 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$u_1 = 1$et $u_{n+1} = \frac{12u_n}{9+u_n^4} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1) a)Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \le u_n \le \sqrt{\sqrt{3}}$

b)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Et en déduire sa convergence et sa limite

2)on pose : $v_n = \frac{u_n}{n!} + \sqrt{\sqrt{3}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2}{9+u_n^4} \le \frac{1}{5}$ et en déduire la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes

Solution :

On a : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{12u_n}{9+u_n^4} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1) a)Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \le u_n \le \sqrt{\sqrt{3}}$?

Soit la fonction f tel que : $f(x) = \frac{12x}{9+x^4}$

la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 12\frac{9+x^4-4x^4}{\left(9+x^4\right)^2} = 36\frac{3-x^4}{\left(9+x^4\right)^2} = 36\frac{\left(\sqrt{3}+x^2\right)\left(\sqrt{3}-x^2\right)}{\left(9+x^4\right)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $\sqrt{3}-x^2$

$$\sqrt{3}-x^2 = \left(\sqrt{\sqrt{3}}-x\right)\left(\sqrt{\sqrt{3}}+x\right)$$

Donc : f est croissante sur $\left[-\sqrt{\sqrt{3}};\sqrt{\sqrt{3}}\right]$

Et f est décroissante sur $\left]-\infty;-\sqrt{\sqrt{3}}\right]$ et $\left[\sqrt{\sqrt{3}};+\infty\right[$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $1 \le u_n \le \sqrt{\sqrt{3}}$

n=1 $u_1 = 1$ donc : $1 \le u_1 \le \sqrt{\sqrt{3}}$

supposons que : $1 \le u_n \le \sqrt{\sqrt{3}}$

montrons que : $1 \le u_{n+1} \le \sqrt{\sqrt{3}}$

on a : $1 \le u_n \le \sqrt{\sqrt{3}}$

et puisque : f est croissante sur $I = \left[1;\sqrt{\sqrt{3}}\right]$

on a : $f(1) \le f(u_n) \le f\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)$ donc

$\frac{6}{5} \le u_n \le \sqrt{\sqrt{3}}$

donc : $1 \le u_{n+1} \le \sqrt{\sqrt{3}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

b)Etudions la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

$$u_{n+1} - u_n = \frac{12u_n}{9+u_n^4} - u_n = u_n\left(\frac{12}{9+u_n^4} - 1\right) = u_n\left(\frac{3-u_n^4}{9+u_n^4}\right)$$

Puisque : $1 \le u_n \le \sqrt{\sqrt{3}}$ donc :

$0 \prec u_n$ et $3-u_n^4 \ge 0$ et $9+u_n^4 \succ 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n \ge 0$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante

Déduction de sa convergence et sa limite ?

la suite (u_n) est croissante et puisque (u_n) majorée par $\sqrt{\sqrt{3}}$ alors :(u_n) est convergente.

Soit : $\lim u_n = l$ on a donc : $1 \le l \le \sqrt{\sqrt{3}}$

Soit la fonction f tel que : $f(x) = \frac{12x}{9+x^4}$

On donc :

a) f est continue sur $I = \left[1;\sqrt{\sqrt{3}}\right]$

b $f(I) = f\left(\left[1;\sqrt{\sqrt{3}}\right]\right) = \left[f(1); f\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)\right]$

$f(I) = \left[\frac{6}{5};\sqrt{\sqrt{3}}\right] \subset I$

c) $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$

d) $u_0 \in I$ e) (u_n) est convergente

Alors la limite l de la suite (u_n)vérifie l'équation :

$l = f(l)$ et $l \in I$

$l = f(l) \Leftrightarrow l = \frac{12l}{9+l^4} \Leftrightarrow 9+l^4 = 12 \Leftrightarrow l^4 = 3$

donc : $l = \sqrt{\sqrt{3}}$ ou $l = -\sqrt{\sqrt{3}}$ et puisque : $l \in I$

donc : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l = \sqrt{\sqrt{3}}$

2) $v_n = \frac{u_n}{n!} + \sqrt{\sqrt{3}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) vérifions que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2}{9+u_n^4} \le \frac{1}{5}$?

on a : $1 \le u_n \le \sqrt{\sqrt{3}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

donc : $1^4 \le u_n^4 \le \left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^4$ donc : $1 \le u_n^4 \le 3$

donc : $10 \le u_n^4 + 9$ donc : $\frac{2}{9+u_n^4} \le \frac{1}{5}$

déduction de la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_{n+1}}{(n+1)!}-\frac{u_n}{n!}=\frac{u_{n+1}}{n!(n+1)}-\frac{u_n}{n!}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{u_{n+1}}{(n+1)}-u_n\right)=\frac{1}{n!}u_n\left(\frac{12}{(n+1)(9+u_n^4)}-1\right)$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n}{(n+1)!}\left(\frac{12}{9+u_n^4}-(n+1)\right)$$

Et puisque : $\frac{u_n}{(n+1)!}\succ 0$ et $\frac{12}{9+u_n^4}\le\frac{6}{5}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

Alors : $v_{n+1}-v_n\le\frac{u_n}{(n+1)!}\left(-n+\frac{1}{5}\right)$

Et puisque : $-n+\frac{1}{5}\le 0\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

Alors : $v_{n+1}-v_n\le 0$ donc : (v_n) est décroissante.

b) Montrons que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes ?

$$\lim v_n-u_n=\lim\frac{u_n}{n!}+\left(\sqrt{\sqrt{3}}-u_n\right)$$

Et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{\sqrt{3}}$ et $\lim\frac{1}{n!}=0$

Donc : $\lim v_n-u_n=0$

Et puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante alors Les suites sont adjacentes donc convergentes et ont la même limite donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\sqrt{\sqrt{3}}$

C’est en forgeant que l’on devient forgeron » Dit un proverbe.
C’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l’on devient un mathématicien